Аналитичка геометрија

-задаци за практикум (обнављање)-

1 Тригонометрија

1. Могу ли синус и косинус датог угла α бити једнаки редом

   а) $-\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ и $-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$;

   б) $\dfrac{4}{\sqrt{65}}$ и $\dfrac{7}{\sqrt{65}}$;

2. Одредити вредност израза $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, ако је $\operatorname{tg} x = 2$.

3. Одредити $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако је $3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 5$.

4. Упростити израз

   а) $\cos(\frac{\pi}{2} - x)\sin(\pi - x) - \cos(\pi + x)\sin(\frac{\pi}{2} - x)$;

   б) $\dfrac{\sin(\pi - x)\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)\operatorname{ctg}(\pi - x)}$.

5. Доказати неједнакост $\sin^2 x \cos^6 x \leq \dfrac{3^3}{4^4}$. Када важи знак једнакости?

6. Упростити израз:

   а) $2\sin(\frac{\pi}{4} + x)\sin(\frac{\pi}{4} - x) + \sin^2 x$;

   б) $\cos(x + y)\cos(x - y) + \sin(x + y)\sin(x - y)$.

7. Израчунати вредност израза $\dfrac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} + \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}$.

8. Доказати идентитете:

   а) $\dfrac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$;

   б) $\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x)} = 2\sin x \cos x$.

   в) $\dfrac{\sin(x + y)}{\cos(x - y)} = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

9. Израчунати $\sin 2x, \cos 2x, \operatorname{tg} 2x$, ако је $\cos x = -\dfrac{5}{13}$ и $\sin x > 0$.

10. Доказати идентитете:

    а) $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$;

    б) $\dfrac{2 - \sin 4x \operatorname{tg} 2x}{\sin 4x} = \operatorname{tg} 2x$.

11. Израчунати вредност израза $\dfrac{1}{2+\cos x+\sin x}$, ако је $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=2$.

12. Изразити $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}$ у функцији од $a=\sin\dfrac{x}{2}$, ако је $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$.

13. Доказати идентитете:

    а) $\sin^2 x\cos x=\dfrac{1}{4}(\cos x-\cos 3x)$;

    б) $\sin^3 x\cos x=\dfrac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)$;

    в) $\sin^3 x\cos^3 x=\dfrac{1}{32}(3\sin 2x-\sin 6x)$.

14. Доказати идентитет $\dfrac{\sin x-2\sin 2x+\sin 3x}{\cos x-2\cos 2x+\cos 3x}=\operatorname{tg}2x$.

15. Решити једначине:

    а) $2\sin x=\sqrt{3}$;

    б) $\sin^2 x+2\sin x=0$;

    в) $2\sin x\cos x-\sin x=0$.

16. Решити једначине

    а) $\sin 3x\sin 2x=\sin 11x\sin 10x$;

    б) $2\sin^2 x+\cos^2 x=\dfrac{3}{2}\sin 2x$;

    в) $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\dfrac{x}{2}$.

17. Израчунати оштре углове трапеза чије су основице $a=15, c=7$, а краци $b=9, d=6$.

18. Решити троугао без употребе рачунских помагала:

    а) $a=2\sqrt{2}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\beta=\dfrac{2\pi}{3}$;

    б) $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3-\sqrt{3}$;

    в) $b=\sqrt{6}$, $c=3+\sqrt{3}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

19. Израчунати оштар угао између дијагонала правоугаоника, ако су дужине страница 8 и 12.

20. Дужине основица једнакокраког трапеза једнаке су 10 и 6, а угао који образују крак и већа основица једнак је $\dfrac{\pi}{3}$. Израчунати дужину крака, висине и површину трапеза.

2 Планиметрија

1. Основице трапеза $ABCD$ су $AB=8$ и $CD=4$. Нека је N тачка на страници BC, таква да је површина троугла $\triangle ABN$ четири пута мања од површине трапеза. Ако је M тачка пресека правих AN и CD, одредити дужину дужи CM.

2. Дужине тетива AB и AC круга k су једнаке, а тетива AD сече тетиву BC у тачки E. Ако је $AC=12$ и $AE=8$, одредити дужину тетиве AD.

3. У троуглу $\triangle ABC$ је $AB=AC$ и угао код темена A је већи од $\dfrac{\pi}{6}$. Нека је D тачка на страници BC, таква да је угао $\measuredangle BAD=\dfrac{\pi}{6}$ и нека је E тачка на страници AC. таква да је $AE=AD$. Израчунати угао $\measuredangle EDC$.

4. Ако је у троуглу $\triangle ABC$ угао код темена A два пута већи од угла код темена B и ако су дужине страница $AC=2$ и $AB=3$, израчунати дужину странице BC.

5. Кроз тачку унутрашњости троугла $\triangle ABC$ повучене су праве паралелне страницама троугла. На тај начин формирана су три мања троугла чије су површине редом једнаке 1, 4 и 9. Израчунати површину троугла $\triangle ABC$.

6. На страници AB паралелограма $ABCD$ површине 1, дата је тачка M таква да је $AB = 3AM$. Ако је N пресек правих AC и DM, израчунати површину троугла $\triangle AMN$.

7. На продужецима страница једнакостраничног троугла $\triangle ABC$дате су тачке K, L и M, такве да важе распореди $\mathcal{B}(A, B, K)$, $\mathcal{B}(B, C, L)$ и $\mathcal{B}(C, A, M)$ и једнакости $BK = CL = AM$. Доказати да је троугао KLM једнакостраничан.

8. Дат је правоугаоник $ABCD$ на чијим се страницама AB, BC, CD и DA налазе редом тачке M, N, P и Q, такве да су дужи AM, BN, CP и DQ међусобно једнаке. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

9. Доказати да бисектрисе углова конвексног четвороугла образују тетивни четвороугао.

10. Израчунати површину једнакокраког трапеза, ако је његова средња линија једнака m, а дијагонале међусобно нормалне.

11. У круг полупречника r уписана су три једнака круга, тако да сваки од њих тангира дати круг и остала два. Израчунати површину криволинијске слике обухваћене између тачака додира уписаних кругова.

12. Израчунати површину трапеза ако су му задате све странице.

13. Координате темена четвороугла $ABCD$ су $A(0,0), B(1,1), C(-1,2)$ и $D(-4,1)$. Одредити слику четвороугла при хомотетији чији је коефицијент $k = \dfrac{3}{2}$ и центар

    а) теме A;

    б) пресечна тачка дијагонала;

    в) тачка $S(2,2)$.

14. Дата је права p и тачке M и N. Шта представља изометрија $\mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_p$, ако тачка M припада правој p и важи $MN \perp p$?

15. Ако је $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_S = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_b$, онда важи $\mathcal{S}_S(a) = b$. Доказати.

16. Шта представља скуп тачака у равни чије координате x и y задовољавају једначину $x^2 - 4x + 2y^2 + 4y - 4 = 0$?

17. Ако су праве $x + 4y - 25 = 0$ и $4x + 9y - 75 = 0$ тангенте елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, одредити вредност $a + b$.

3 Стереометрија

1. Површина омотача праве правилне тростране пирамиде и површина њене основе су у размери $\sqrt{3} : 1$. Одредити косинус угла под којим је страна омотача нагнута према основи.

2. Бочне ивице правилне зарубљене тростране пирамиде нагнуте су према равни основе под углом од $\dfrac{\pi}{4}$. Одредити запремину пирамиде ако су њене основне ивице дужине 4 и 3.

3. Трапез ротира једном око веће, а затим око мање основице. Запремине добијених обртних тела се односе као $3 : 4$. Одредити размеру основица трапеза.

4. Колику површину земље види пилот са висине h изнад Земље.

5. Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$. На бочним странама $ADD'A'$ и $BCC'B'$ одредити редом тачке M и N, такве да је дужина изломљене линије $AMNC'$ минимална.

6. Дата је пирамида $ABCDE$ са врхом E, чија је основа квадрат ивице дужине 6 и чије су све бочне ивице дужине 8. Одредити

а) висину пирамиде;

б) угао који ивица AB заклапа са основом пирамиде;

в) угао између равни EAB и основе пирамиде.

7. Основа пирамиде $ABCDE$ је правоугаоник $BCDE$ чије су странице дужина $BE = 5$ и $BC = 10$. Раван ABC заклапа угао од $\dfrac{\pi}{2}$ са равни основе. Ако је угао код темена у троуглу $\triangle ABC$ једнак $\dfrac{\pi}{2}$. а угао код темена A троугла $\triangle EAB$ једнак $\dfrac{\pi}{6}$, одредити углове $\measuredangle BAC, \measuredangle DAC$ и $\measuredangle DAE$.

8. Површина дијагоналног пресека коцке једнака је p. Израчунати дужине дијагонале основе, ивице и дијагонале коцке, као и површину и запремину коцке.

9. Одредити однос површина уписане и описане сфере правилног тетраедра.

10. У зарубљену купу уписана је сфера полупречника r. Ако је површина једне основе купе двоструко већа од површине друге основе, израчунати запремину зарубљене купе.