GEOMETRIJA – januar 2009. godine

1. Dat je trougao ABC. Neka su M, N tačke takve da je $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NB}$ i P središte duži BC. Ako je $X = MN \cap AP$, odrediti u kom odnosu tačka X deli duž AP.
2. Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena $A(1,1,0)$, $B(-1,3,-2)$, $C(2,-3,1)$ i $D(0,0,4)$.
3. Translacijom svesti krivu $2x^2 - 8x + 5y + 3 = 0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti jednačinu normale iz tačke $M(3,5,-2)$ na ravan $\pi: \ 2x - 3z + 8 = 0$.
5. Data je poliedarska površ plosnima $p_0 = \langle 0,3,7,4\rangle$, $p_1 = \langle 1,2,6,5\rangle$, $p_2 = \langle 1,5,0\rangle$, $p_3 = \langle 3,2,1\rangle$, $p_4 = \langle 2,3,7,6\rangle$, $p_5 = \langle 3,1,0\rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2 = \langle 1,5,0\rangle$.

GEOMETRIJA – april 2009. godine

1. Dat je trougao ABC, $A(3,5)$, $B(9,3)$, $C(5,3)$. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. Da li centar kruga pripada trouglu ABC?
2. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice 4. Odrediti ugao izmedju dijagonala strane kocke AD_1 i B_1C_1, a zatim odrediti zapreminu tetraedra AD_1C_1B.
3. Rotacijom svesti krivu $x^2 + y^2 - xy + 1 = 0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti ravan α koja sadrži tačku $A(1,1,-1)$, paralelna je pravoj $p: \ x + y = 0,\ 2x + y - 2 = 0$, a sa ravni $\beta: \ x - 4y - z - 2 = 0$ gradi ugao $\frac{\pi}{4}$.
5. a) Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i napisati njene pljosni.
   b) Odrediti rub i broj komponenata ruba.
   c) Dokazati da Mebijusova traka nije orjentabilna.

GEOMETRIJA – januar 2010. godine

1. Dat je paralelogram $ABCD$, čije je središte tačka S. Ako je data baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AB}$, odrediti koordinate tačaka A, B, C, D, S u reperu Ae.
2. Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $A(3,-2)$ i koeficijentom $\frac{2}{3}$. U koju tačku se slika tačka $B(0,1)$ pri ovoj homotetiji?
3. Rotacijom svesti krivu $x^2 + 4xy - 2y^2 + 6 = 0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti ravan α koja sadrži pravu $p: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$, a sa ravni $\beta: \ x - 4y - 8z + 12 = 0$ gradi ugao $\frac{\pi}{4}$.
5. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 0,3,1\rangle$, $p_1 = \langle 8,6,5\rangle$, $p_2 = \langle 7,6,8\rangle$, $p_3 = \langle 3,2,6,7\rangle$, $p_4 = \langle 5,4,8\rangle$, $p_5 = \langle 9,6,2\rangle$, $p_6 = \langle 3,4,0\rangle$, $p_7 = \langle 1,5,4,0\rangle$, $p_8 = \langle 7,4,3\rangle$, $p_9 = \langle 1,5,9\rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_5 = \langle 9,6,2\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – april 2010. godine

1. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko $\triangle ABC$ ako je $A(4,-3),\ B(2,-5),\ C(2,-1)$.
2. Odrediti Bezierovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1,0),\ P_1(-1,2),\ P_2(3,3),\ P_3(5,0)$.
3. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $P(0,-1,\frac{4}{3})$ i normalna je na ravan $\alpha:\ -y+2z+11=0$.
4. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 2,1,0\rangle, p_1=\langle 4,6,5\rangle, p_2=\langle 4,2,5\rangle, p_3=\langle 1,2,4\rangle, p_4=\langle 6,7,4\rangle, p_5=\langle 7,1,6\rangle,$ $p_6=\langle 6,0,1\rangle, p_7=\langle 3,0,2\rangle, p_8=\langle 5,3,2\rangle, p_9=\langle 0,5,6\rangle$.
   (a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.
   (b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_7=\langle 3,0,2\rangle$.
   (c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – januar 2011. godine

1. Dat je trougao $ABC:\ A(-1,4),\ B(7,1),\ C(4,-1)$. Odrediti ortocentar trougla i ispitati da li pripada njegovoj unutrašnjosti.
2. Odrediti medjusobni polozaj pravih $p: P(-3,1),\ \overrightarrow{p}(1,1)$ i $q: x-y+5=0$.
3. Translacijom svesti krivu $2x^2+8x-5y+3=0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti tačku simetričnu tački $M(10,0,-1)$ u odnosu na ravan $\pi:\ 5x-3y+4z+4=0$.
5. Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ako je izabrana orijentacija pljosni $p_0=\langle B_1,B,C,C_1\rangle$.

GEOMETRIJA – februar 2011. godine

1. Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $A(1,2)$ i koeficijentom 2. U koju tačku se slika težište $\triangle ABC$, ako je $B(0,-2),\ C(2,9)$?
2. Rotacijom svesti krivu $4x^2+24xy+11y^2+5=0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
3. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $p: \frac{x+3}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{0}$ i normalna je na ravan $\pi: 4x+y-3z=2$.
4. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 2,1,0\rangle, p_1=\langle 5,4,7,6\rangle, p_2=\langle 1,5,0\rangle, p_3=\langle 3,7,0\rangle, p_4=\langle 2,6,5,1\rangle, p_5=$ $\langle 5,4,0\rangle, p_6=\langle 2,7,3\rangle$.
   (a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.
   (b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_5=\langle 5,4,0\rangle$.
   (c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – oktobar 2011. godine

1. Ispitati da li tačke $C(5,-3)$ i $D(1,0)$ pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom AB, $A(2,-2), B(3,1)$, a zatim odrediti medjusoban položaj duži AD i CB.
2. Translacijom svesti krivu $-2x^2+5y^2+4x-30y+42=0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
3. Ispitati da li prava $p := \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-3}$ seče trougao $\triangle ABC$, $A(2,-4,1), B(3,1,0), C(-1,3,4)$ i, u slučaju da ga seče, odrediti koordinate presečne tačke.
4. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 1,3,4\rangle$, $p_1 = \langle 5,7,1\rangle$, $p_2 = \langle 3,6,5\rangle$, $p_3 = \langle 6,9,5\rangle$, $p_4 = \langle 5,4,3\rangle$, $p_5 = \langle 2,8,7,1\rangle$, $p_6 = \langle 1,4,5\rangle$, $p_7 = \langle 2,8,6\rangle$, $p_8 = \langle 8,7,9\rangle$.
   (a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.
   (b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_7 = \langle 2,8,6\rangle$.
   (c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – januar 2012. godine

1) (6+6) a) Napisati definiciju vektorskog proizvoda i nacrtati odgovarajuću sliku. b) Koristeći vektorski proizvod odrediti površinu trougla ABC, $A(-2,5)$, $B(-1,1)$, $C(5,1)$.
2) (5+7) a) Definisati triangulaciju prostog poligona $p = p_1 \dots p_n$ i nacrtati sliku. b) Formulisati i dokazati teoremu o triangulaciji poligona p i broju trouglova u toj triangulaciji (bez dokaza da svaki prost poligon sa više od 3 temena ima unutrašnju dijagonalu)
3) (8+2) Odrediti formule homotetije sa koeficijentom $k=2$ sa centrom $S(3,-2)$ (formule zapisati u obliku $x' = \dots, y' = \dots$). Šta je slika tačke $A(1,2)$?
4) (5+3+6) a) Odrediti centar i poluprečnik kruga $k : x^2+y^2-8x+6y=0$. b) Napisati parametrizaciju tog kruga centralnim uglom. c) Odrediti presečne tačke kruga k i prave $p : 4x-3y-50=0$.
5) (6+6) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 6,7,0,3\rangle$, $p_1 = \langle 0,1,2,3\rangle$, $p_2 = \langle 3,2,5,4\rangle$, $p_3 = \langle 4,5,0,1\rangle$. a) Odrediti rub i komponente ruba poliedarske površi. b) Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni počev od pljosni p_0. Da li je površ orjentabilna?

GEOMETRIJA – februar 2012. godine

1) (6) Ispitati da li tačka $M(1,2)$ pripada unutrašnjosti trougla ABC, $A(-1,-2), B(3,7), C(7,13)$.
2) (3+9+5) a) Napisati opšti oblik krive drugog reda. b) Napisati sve kanonske oblike krive drugog reda i šta predstavljaju. c) Svesti na kanonski oblik i reći o kojoj je krivoj reč: $x^2-2y^2-6x+4y+7=0$.
3) (10) Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i čije je rastojanje od tačke $M(1,1,1)$ jednako $\frac{5}{\sqrt{14}}$.
4) (3+3+5) a) Definisati mimoilazne prave b) U kojim medjusobnim položajima mogu biti dve prave u prostoru c) Odrediti medjusobni položaj pravih $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ i $q : x+2y+3z+6=0, 3x+2y+z+6=0$.
5) (6+6+4) Data je poliedarska površ: $p_0 = \langle 1,2,3\rangle$, $p_1 = \langle 2,3,7,6\rangle$, $p_2 = \langle 3,7,8,4\rangle$, $p_3 = \langle 8,5,1,4\rangle$, $p_4 = \langle 5,6,2,1\rangle$, $p_5 = \langle 7,8,9,10\rangle$, $p_6 = \langle 3,1,11\rangle$. a) Odrediti rub i broj komponenata ruba. b) Skicirati površ. c) Izračunati Ojlerovu karakteristiku površi.

GEOMETRIJA – januar 2013. godine

1) (6+6) a) Dokazati da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri vektora jednaka zapremini paralelopipeda odredjenog tim vektorima. b) Ispitati da li prava p zadata tačkom $P(1,2,3)$ i vektorom $\vec{p}\ (1,-1,0)$ seče trougao ABC, $A(2,0,4)$, $B(1,-1,3)$, $C(-2,1,1)$.

2) (2+2+8) Formulisati, nacrtati i dokazati optičko svojstvo parabole.

3) (9+3) Date su tačke $P_0(1,1)$, $P_1(11,-4)$, $P_2(6,11)$, $P_3(1,6)$. a) Koristeći de-Casteljau algoritam odrediti $\alpha(0.4)$, gde je α Bezijerova kriva odredjena datim tačkama. b) Podeliti krivu α na dve Bezijerove krive praveći rez u tački $\alpha(0.4)$.

4) (10) Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $p : \frac{x-4}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-10}{-2}$, a od tačke $C(1,2,3)$ je udaljena za 3.

5) (2+6+6) Date su pljosni: $p_0 = \langle 0,1,4,3\rangle$, $p_1 = \langle 5,2,1,4\rangle$, $p_2 = \langle 3,0,5,2\rangle$, $p_3 = \langle 1,0,5\rangle$. a) Ispitati da li pljosni zadaju apstraktnu poliedarsku površ. b) Odrediti rub i broj komponenata ruba. c) Izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni počev od p_2. Da li je površ orjentabilna?

GEOMETRIJA – februar 2013. godine

1) (4+3+5) a) Definisati vektorski proizvod i nacrtati sliku. b) Izračunati površinu paralelograma $ABCD$ ako su date tačke $A(2,3), B(-2,2)$ i $C(0,4)$. c) Odrediti orijentaciju trougla BDA.

2) (8+4) Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{2\pi}{3}$ oko tačke $N(1,-2)$. U koju tačku se preslikava tačka $M(-3,2)$? (formule zapisati u obliku $x' = \dots, y' = \dots$)

3) (4+4+4) Sortirati tacčke $P_0 = (2,2), P_1 = (-2,1), P_2 = (3,-2), P_3 = (0,-5), P_4 = (1,-2), P_5 = (-1,-4), P_6 = (4,-5), P_7 = (-3,-1)$ tako da formiraju prost poligon, a zatim taj poligon triangulisati. Šta je konveksni omotač datog skupa tačaka?

4) (3+3+3) Šta predstavljaju sledeće jednačine u prostoru?
a) $y^2 + z^2 = 0$ b) $x^2 + z^2 = 0, y = 4$ c) $\frac{z-1}{2} = \frac{y-2}{1}$

5) (6+3+6) a) Skicirati glatku Mebijusovu traku i njen poliedarski model. b) Napisati tabelu povezanosti poliedarskog modela. c) Dokazati da Mebijusova traka nije orijentabilna.

**Bonus zadaci:*

a) Skicirati betonsko stepenište koje sadrži 4 stepenika i njegovu ortogonalnu projekciju na ravan tla.
b) Skicirati površi iz zadatka 4).

GEOMETRIJA – januar 2014.godine

1) (8+4+2) Odrediti formule afinog preslikavanja koje $\triangle ABC$ preslikava u $\triangle A'B'C'$ ako je $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(2,-1)$ i $A'(1,-1)$, $B'(2,1)$, $C'(3,2)$. Ispitati da li se tačka $M(1,1)$ nalazi unutar $\triangle ABC$. Da li se slika tačke M pri ovom afinom preslikavanju nalazi unutar $\triangle A'B'C'$?(obrazložiti)

2) (1+3+6) a) Napisati jednačinu ravni u prostoru. b) Šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni α? c) Data je ravan $\alpha : 6x - 2y + 3z - 5 = 0$ i u njoj tačka $C(4,2,-5)$. Odrediti parametrizaciju kruga κ poluprečnika $r = 3$ sa centrom C koji pripada ravni α.

3) (6+6) Date su tačke $P_0(1,-4)$, $P_1(6,6)$, $P_2(6,1)$, $P_3(1,1)$. a) Koristeći de-Casteljau algoritam, odrediti tangentu u tački $\alpha(0.8)$. b) Odrediti jednačinu krive čije su kontrolne tačke $P_0, \dots, P_3$. Da li je kontrolni poligon prost?

4) (6+6) Odrediti centralnu projekciju tačke $P(2,-1,0)$ na ravan $\alpha : x + y - 2z + 3 = 0$ ako je centar projektovanja tačka $O(0,1,1)$. Šta je ortogonalna projekcija tačke P na ravan α?

5) (2+6+4) a) Definisati Ojlerovu karakteristiku površi. b) Skicirati glatke površi roda $0, 1$ i 2. c) Odrediti Ojlerovu karakteristiku površi iz dela b).

GEOMETRIJA – februar 2014.godine

1) (10) Dat je paralelogram $ABCD$. Ako je tačka E središte stranice AB i tačka F presek duži AC i DE, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AC i DE.

2) (4+4+4) Napisati kanonsku i parametarsku jednačinu hiperbole. Navesti i nacrtati optičku osobinu hiperbole. Svesti hiperbolu $x^2 - 4y^2 - 2x - 32y + 36 = 0$ na kanonski oblik translacijom.

3) (10) Odrediti centar S upisanog kruga u trougao $\triangle ABC, A(3,0), B(6,4), C(0,4)$.

4) (6+4+6) Napisati matrice rotacija oko koordinatnih osa u prostoru. Navesti Ojlerovu teoremu o dekompoziciji ortogonalne matrice. Odrediti formule rotacije oko prave p koja sadrži tačku $P(1,2,3)$ i paralelna je $x-$osi.

5) (5+5+2) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,5,4 \rangle$, $p_1 = \langle 8,7,4,3 \rangle$, $p_2 = \langle 1,6,5,2 \rangle$, $p_3 = \langle 4,6,5 \rangle$, $p_4 = \langle 1,6,7,8 \rangle$, $p_5 = \langle 6,4,7 \rangle$.

a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.

b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_1 = \langle 8,7,4,3 \rangle$.

c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – jun 2014.godine

1) (9 + 5) a) Definicija i računanje vektorskog proizvoda. Defnicija i određivanje orijentacije trougla. Uslov kolinearnosti tri tačke. b) Izračunati površinu prostog poligona čija su temena $P_0(1,1)$, $P_1(11,-4)$, $P_2(6,11)$, $P_3(1,6)$, $P_4(-3,4)$, $P_5(-1,1)$.

2) (8 + 4) Odrediti afino preslikavanje (kao kompoziciju rotacije, homotetije i translacije) koje kvadrat $ABCD$, $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$, preslikava u kvadrat $SCPD$, gde je $S = AC \cap BD$, a P je četvrto teme kvadrata. Odrediti koordinate slike tačke $M(-1,0)$ pri ovoj transformaciji.

3) (5 + 5) Skicirati i navesti koje geometrijske objekte prestavljaju sledeće jednačine u prostoru:
a) $x^2 + z^2 = 12$, b) $x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1,\ 5x + y + z = 1$.

4) (6 + 6) a) Napisati definiciju Beizijerove krive stepena 3 i skicirati je. b) Kako se Bezijerova kriva stepena 3 deli na dve krive istog stepena u tački $t = 0.75$? (nacrtati i navesti koji su to kontrolni poligoni)

5) (3 + 6 + 3) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,3,4 \rangle$, $p_1 = \langle 5,1,2 \rangle$, $p_2 = \langle 1,3,5 \rangle$, $p_3 = \langle 4,2,1 \rangle$, $p_4 = \langle 3,2,5 \rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti (ako je moguće) usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2 = \langle 1,3,5 \rangle$. Da li je površ orijentabilna? Skicirati površ.

GEOMETRIJA – septembar 2014.godine

1) (5 + 9) a) Definisati težište trougla i nacrtati sliku. Navesti formulu za težište n tačaka $P_1, \ldots, P_n$. b) Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u tački T i da ih ona deli u odnosu $3:1$.

2) (6 + 6) Odrediti formule refleksije u odnosu na ravan $\alpha_0 :\ 6x + 2y + 3z = 0$. Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{\pi}{3}$ oko y-ose.

3) (10) Odrediti presek ravni $\alpha :\ 4x - y + 2z + 1 = 0$ i trougla ABC ako je $A(1,6,0)$, $B(3,3,-5)$, $C(1,4,4)$. Skicirati sliku.

4) (6 + 6) Šta je ekcentricitet i koliki je ekcentricitet hiperbole? Navesti i nacrtati optičku osobinu hiperbole.

5) (3 + 6 + 3) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,7,8 \rangle, p_1 = \langle 4,6,5 \rangle, p_2 = \langle 4,2,5 \rangle, p_3 = \langle 7,2,4 \rangle, p_4 = \langle 6,1,4 \rangle, p_5 = \langle 7,1,6 \rangle, p_6 = \langle 6,8,7 \rangle, p_7 = \langle 3,8,2 \rangle, p_8 = \langle 5,3,2 \rangle, p_9 = \langle 8,5,6 \rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti (ako je moguće) usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_4 = \langle 6,1,4 \rangle$. Da li je površ orijentabilna? Skicirati površ.

GEOMETRIJA – februar 2015.godine

1) (8) Dat je paralelogram $ABCD$. Ako tačka E deli duž CD u odnosu $2:1$, a tačka F je presek duži AC i BE, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AC i BE.

2) (4+4+6) Napisati opšte formule afinog preslikavanja i objasniti šta je šta. Da li afinim preslikavanjem možemo preslikati paralelogram u trapez (obrazložiti)? Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao ABC, $A(2,3), B(-1,0), C(0,3)$, preslikava u trougao $A'B'C'$, $A'(1,0), B'(0,0), C'(0,1)$.

3) (8+4) Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p : \frac{x}{0} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{3}$ i $q : 2x - 2y + z - 21 = 0,\ 4y + 3z - 13 = 0$.

4) (4+10) a) Šta je konveksni omotač skupa n-tačaka u ravni? Nacrtati primer. b) Opisati Grahamov algoritam za određivanje konveksnog omotača i navesti primer.

5) (5+2+5) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,5,4 \rangle$, $p_1 = \langle 8,7,4,3 \rangle$, $p_2 = \langle 1,6,5,2 \rangle$, $p_3 = \langle 4,6,5 \rangle$, $p_4 = \langle 1,6,7,8 \rangle$, $p_5 = \langle 8,1,3 \rangle$, $p_6 = \langle 6,4,7 \rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Skicirati površ. c) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2 = \langle 1,6,5,2 \rangle$. Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – jun 2015.godine

1) (6+6) Ako je $A(0,-1)$, $B(2,1)$, $C(4,-3)$, odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko trougla ABC. Da li centar kruga pripada unutrašnjosti trougla ABC?

2) (10) Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $N(1,-2)$ i koeficijentom $k=-\frac{1}{3}$. U koju tačku se preslikava tačka $M(-6,3)$? (formule zapisati u obliku $x'=\ldots, y'=\ldots$)

3) (4+4+6) Navesti definiciju rotacije oko prave p u prostoru. Napisati matricu roatacije oko z-ose za ugao ϕ. Napisati matricu rotacije oko prave $p: x=y=z$ za ugao $\frac{\pi}{3}$.

4) (2+6+4) Napisati opšti oblik krive drugog reda. Napisati sve kanonske oblike krivih drugog reda (i imena tih krivih) i skicirati ih. Svesti krivu $x^2+3y^2-2x+12y+7=0$ na kanonski oblik translacijom.

5) (2+4+6) Ispitati da li pljosni $p_0=\langle 2,7,8\rangle, p_1=\langle 4,6,5\rangle, p_2=\langle 4,2,5\rangle, p_3=\langle 7,2,4\rangle, p_4=\langle 6,1,4\rangle, p_5=\langle 7,1,6\rangle, p_6=\langle 6,8,7\rangle, p_7=\langle 3,8,2\rangle, p_8=\langle 5,3,2\rangle, p_9=\langle 8,5,6\rangle$ zadaju apstraktnu poliedarsku površ. Odrediti rub i broj komponenti ruba, kao i Ojlerovu karakteristiku te površi.

GEOMETRIJA – septembar 2015.godine

1) (4+4+2+2) Definisati koordinate tačaka i vektora. Neka je $ABCDEF$ pravilan šestougao i neka su $e=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$ i $f=(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF})$ dve baze. Odrediti formule transformacije koordinata iz repera A_e u reper D_f. Odrediti koordinate temena šestougla u obe baze. Da li ova promena koordinata čuva orjentaciju?

2)(6+2+4) Odrediti formule preslikavanja f koje je kompozicija homotetije sa centrom $C(2,1)$ i koeficijentom 3 i refleksije u odnosu na pravu $x=2$. Šta je slika trougla OAB, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, pri preslikavanju f (izračunati i skicirati)? Predstaviti preslikavanje f matricom 3×3. Da li je preslikavanje f izometrija (detaljno obrazložiti)?

3) (4+4+2+4) Šta sve može biti presek ravni i trougla (navesti i skicirati)? Odrediti presek ravni $\alpha: x+z=0$ i trougla $A(-2,-2,0)$, $B(1,3,1)$, $C(2,2,2)$. Odrediti jednačinu prave p koja sadrži tačku $P(-1,2,2)$ i normalna je na ravan α. Da li prava p seče trougao ABC (obrazložiti)?

4) (4+4+2+4) Objasniti rečima šta znači afina invarijantnost Bezijerove krive. Ako je kontrolni poligon Bezijerove krive α: $P_0(-1,-3)$, $P_1(4,7)$, $P_2(-6,2)$, $P_3(9,-3)$, primenom De Casteljau algoritma podeliti Bezijerovu krivu na dve krive i odrediti joj tangentu u tački $\alpha(0.4)$. Skicirati algoritam.

5) (4+4) Definisati i nabrojati Platonova tela. Odrediti svakom telu rod i Ojlerovu karakteristiku.

GEOMETRIJA – januar 2016.godine

1) (8+4+2) Odrediti formule afinog preslikavanja koje $\triangle ABC$ preslikava u $\triangle A'B'C'$ ako je $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(-3,0)$ i $A'(1,-1)$, $B'(0,0)$, $C'(3,2)$. Odrediti težište T trougla ABC, a zatim ispitati da li se tačka T nalazi u unutrašnjosti $\triangle ABC$. Da li se slika tačke T pri ovom afinom preslikavanju nalazi unutar $\triangle A'B'C'$? (obrazložiti)

2) (4+3+2) a) Napisati parametarsku i implicitnu jednačinu ravni. Skicirati i označiti odgovarajuće elemente. b) U kom međusobnom položaju mogu biti dve ravni u prostoru? c) Skicirati ravni $\alpha: x-z+4=0$ i $\beta: 2x-3y-2z+6=0$.

3) (3+4+6) a) Skicirati poligon $P_0P_1P_2P_3$, $P_0(-1,-2)$, $P_1(4,8)$, $P_2(4,3)$, $P_3(-1,3)$, i ispitati da li je prost. b) Odrediti Bezijerovu krivu $\alpha_3(t)$, $t\in[0,1]$ čije su kontrolne tačke P_0,P_1,P_2,P_3 (ne nužno tim redosledom) i kontrolni poligon je prost. c) Koristeći de-Casteljau algoritam, odrediti tangentu na krivu $\alpha_3(t)$ u tački $\alpha_3(0.2)$.

4) (6+6+2) Odrediti tačku Q simetričnu tački $P(0,1,-1)$ u odnosu na ravan $\alpha: x+2y-z+3=0$, a zatim odrediti tačku R simetričnu tački P u odnosu na pravu $l: x=y=z$. Da li je tačka P bliža tački Q ili R?

5) (2+4+4) a) Definisati Ojlerovu karakteristiku površi. b) Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake i dodekaedra. c) Navesti primer i skicirati **glatke** površi roda 0 i 1.

Geometrija (I-smer), februar 2016. godine

1) (4+4+6) a) Definisati mešoviti proizvod. Kako se računa mešoviti proizvod u ortonormiranoj bazi?

b) Dokazati da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda vektora jednaka zapremini paralelepipeda razapetog njima.

c) Koristeći mešoviti proizvod, ispitati koplanarnost tačaka $A(2,0,4)$, $B(-1,3,3)$, $C(0,-5,7)$, $D(2,1,3)$. Ako tačke nisu koplanarne, izračunati zapreminu tetraedra $ABCD$.

2) (5+5) Odrediti formule refleksije u odnosu na pravu $p: 4x-3y+3=0$ u ravni. Odrediti sliku tačke $M(-3,2)$ pri ovom preslikavanju.

3) (6+4+4) a) Napisati kanonsku jednačinu hiperbole i odrediti joj osnovne elemente. Skicirati.

b) Rotacijom pokazati da je kriva $xy=1$ hiperbola. Skicirati je.

c) Da li je kriva zadata jednačinom hiperbola $xy+x=0$? Obrazložiti.

4) (4+6) a) Odrediti tačku prodora C prave $p: \frac{x}{0}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+3}{0}$ kroz ravan $\alpha: y+z-6=0$.

b) Napisati parametarsku jednačinu jediničnog kruga sa centrom u tački C koji pripada ravni α.

5) (5+5+2) a) Odrediti rub i broj komponenti ruba poliedarske površ date pljosnima: $p_0=\langle 0,3,7,4\rangle$, $p_1=\langle 1,6,2,5\rangle$, $p_2=\langle 5,0,1\rangle$, $p_3=\langle 3,2,1\rangle$, $p_4=\langle 2,3,7,6\rangle$, $p_5=\langle 3,1,0\rangle$.

b) Izvršiti usklađivanje orijentacije pljosni počev od pljosni $p_2=\langle 5,0,1\rangle$.

c) Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), januar 2017. godine

1) (6+6) U ravni je dat trougao ABC. Neka tačka D pripada stranici AB, a tačka E stranici BC, tako da je $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}$ i $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{2}$. Ako se duži AE i CD seku u tački F, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD. Odrediti koordinate temena trougla u reperu $Fe,\ e=\left(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FE}\right)$.

2) (6+2) U ravni je dat trougao ABC, $A(2,-2)$, $B(6,-5)$, $C(8,6)$. Odrediti koordinate težišta T, ortocentra H i centra O kruga opisanog oko trougla. Koje od ovih tačaka se nalaze unutar trougla ABC?

3) (2+6+6) Napisati definiciju Bezijerove krive stepena 2 i skicirati je. Pokazati da je svaka Bezijerova kriva stepena 2 deo parabole. Predstaviti deo elipse $x=5\cos\theta,\ y=3\sin\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ kao racionalnu Bezijerovu krivu.

4) (5+3+6) Definisati izometrije i kretanja prostora, navesti primere. Koji uslov mora da zadovoljava matrica kretanja (izometrije)? Odrediti formule refleksije u odnosu na ravan $\alpha: 2x-y+2z-5=0$.

5) (2+8+2) Definisati i nabrojati Platonova tela. Odrediti svakom telu Ojlerovu karakteristiku i dualno telo (skicirati). Da li su Platonova tela orijentabilna? (obrazložiti)

Geometrija (I-smer), jun 2017. godine

1) (4+4+2+2) Dat je jedinični kvadrat $ABCD$. Odrediti vezu između koordinata (x,y) u reperu De i koordinate (x',y') u reperu Bf ako je $e=(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$ i $f=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$. Odrediti koordinate temena u oba repera. Koji tip transformacija ON repera se ovde javlja? Skicirati!

2) (6+4) Odrediti presek kruga $\kappa: x^2-4x+y^2+2y+1=0$ i prave $p: P(1,2),\ \overrightarrow{p}=(-1,1)$. Koliko je rastojanje prave p od centra kruga?

3) (4+4+4) Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(-2,1)$, $P_1(0,3)$, $P_2(-2,5)$, $P_2(0,1)$. Koristeći de Casteljau algoritam, odrediti tačku Bezijerove krive $\alpha_3(t)$ za $t=\frac{3}{4}$. Povećati stepen krive za 1.

4) (3+5+6) a) Odrediti parametarsku jednačinu normale n iz tačke $A(1,2,3)$ na ravan $\alpha: x+y-z=0$. b) Izvesti formule rotacije u prosoru oko x-ose za ugao θ. c) Odrediti sliku prave n pri rotaciji oko x-ose za ugao $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

5) (4+2+6) Nacrtati torus i njegov poliedarski model. Odrediti rod i Ojlerovu karakteristiku torusa. Da li je torus orijentabilna površ? (detaljno obrazložiti)

Geometrija (I-smer), januar 2018. godine

1) $(6+4)$ U ravni je dat trougao ABC. Neka tačka D pripada stranici AB, a tačka E stranici BC, tako da je $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$ i $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{3}$. Ako se duži AE i CD seku u tački F, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD. Odrediti baricentričke koordinate tačke F u odnosu na tačke A, B i C.

2) $(6+2+2)$ Odrediti formule preslikavanja f koje je kompozicija refleksije u odnosu na pravu $x-y=0$ i skaliranja sa centrom u tački $A(1,1)$ i koeficijentima $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Da li preslikavanje f čuva orijentaciju? Da li je izometrija?

3) $(5+6+3)$ Skicirati elipsu i definisati njene osnovne elemente. Navesti i dokazati **fokusnu** osobinu elipse. Navesti **optičko** svojstvo elipse.

4) $(3+5+5)$ Ispitati da li prava $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{0}$ seče trougao ABC, $A(1,0,-1)$, $B(2,-1,2)$, $C(0,0,1)$. U slučaju da seče, odrediti koordinate presečne tačke. Odrediti ugao koji prava p zaklapa sa ravni trougla ABC.

5) $(2+2+3+6)$ Ispitati da li pljosni $p_0 = \langle 2,7,4\rangle, p_1 = \langle 4,6,1\rangle$, $p_2 = \langle 4,2,3,5\rangle$, $p_3 = \langle 7,2,8\rangle$, $p_4 = \langle 6,5,4\rangle$, $p_5 = \langle 7,1,6\rangle$, $p_6 = \langle 6,5,8,7\rangle$, $p_7 = \langle 3,8,2\rangle$ zadaju apstraktnu poliedarsku površ. Skicirati je. Odrediti rub i broj komponenti ruba, kao i Ojlerovu karakteristiku te površi. Izvršiti, ako je moguće, usklađivanje orijentacija pljosni počev od pljosni p_6.

Geometrija (I-smer), februar 2018. godine

1) $(6+4)$ Odrediti površinu i orijentaciju $\triangle ABC$, $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(2,-1)$. Da li se tačke A i B nalaze sa iste strane prave CT, gde je T težište $\triangle ABC$? (obrazložiti)

2) $(2+6+6)$ U proširenoj afinoj ravni su date tačke $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(0,0)$ i $A'(1,1)$, $B'(0,1)$, $C'(1,0)$. a) Odrediti tačku D tako da je $ABCD$ paralelogram. b) Odrediti formule afinog preslikavanja pri kome se $ABCD$ slika u $A'B'C'D'$. Koji tip četvorougla je $A'B'C'D'$? c) Odrediti formule projektivnog preslikavanja pri kome se $ABCD$ slika u $A'B'C'D'$, gde je D' presek pravih $p: x+2y=0$ i $q: 2x+4y-3=0$.

3) $(4+2+8)$ a) Napisati parametarsku jednačinu kosog hica. b) Za koji početni ugao se dostiže najveća daljina/visina? c) Lopta je šutnuta sa zemlje pod uglom od $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$. Kolika treba da bude početna brzina da bi lopta pogodila metu na rastojanju od $30m$ i visini $2m$? Za koje vreme će lopta pogoditi metu? (uzeti da je gravitaciono ubrzanje $g = 10\frac{m}{s^2}$)

4) $(4+3+3)$ Šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni? Odrediti ortonormirani koordinatni sistem (x', y', z') u odnosu na ravan $\alpha: 2x - y - 2z + 4 = 0$. Napisati vezu novih koordinata sa standardnim koordinatama (x, y, z).

5) $(4+4+4)$ Nacrtati glatki i poliedarski model torusa. Napisati mu tabelu povezanosti i odrediti Ojlerovu karakteristiku i rod. Pokazati da je torus orijentabilna površ.

Geometrija (I-smer), jun 2018. godine

1) $(6+4+2)$ Napisati opšte formule transformacije koordinata ortonormiranih repera (oba oblika), skicirati i objasniti koji oblik šta predstavlja. Da li formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

prestavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

2) $(4+4)$ Od datih tačaka u ravni formirati prost poligon, a zatim ga triangulisati: $P_0 = (0,1)$, $P_1 = (3,-1)$, $P_2 = (1,-2)$, $P_3 = (5,-3)$, $P_4 = (6,1)$, $P_5 = (4,2)$, $P_6 = (0,0)$. Primenom Grahamovog algoritma odrediti konveksni omotač skupa ovih tačaka.

3) $(6+3+5)$ Date su tačke $P_0(1,0)$, $P_1(11,-5)$, $P_2(6,10)$, $P_3(1,5)$. a) Koristeći de-Kasteljau algoritam odrediti $\alpha(0.6)$, gde je α Bezijerova kriva odredjena datim tačkama. b) Podeliti krivu α na dve Bezijerove krive praveći rez u tački $\alpha(0.6)$. c) Povećati stepen "desne" krive za 1.

4) $(8+5)$ a) Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-10}{2}$, a od tačke $C(2,1,3)$ je udaljena za 3. b) Odrediti tačku D simetričnu tački C u odnosu na ravan α.

5) $(4+5+4)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela. c) Odrediti odnos zapremina tetraedra i njemu dualnog tela.

Geometrija (I-smer), septembar 2018. godine

1) $(4+4+4+4)$ Odrediti težište T, ortocentar H i centar opisanog kruga O oko trougla ABC, $A(3,4)$, $B(-1,0)$, $C(7,2)$. Koje od ovih tačaka se nalaze **unutar** $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) $(2+5+3)$ Da li je trougao ABC iz prethodnog zadatka podudaran trouglu $A'B'C'$, $A'(5,-2)$, $B'\left(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)$, $C'(7,2)$? Odrediti formule izometrije kojom se $\triangle ABC$ preslikava u $\triangle A'B'C'$. O kojoj se izometriji radi?
3) $(6+6)$ Skicirati hiperbolu i definisati njene osnovne elemente. Rotacijom pokazati da je kriva $xy=1$ hiperbola i skicirati je.
4) $(5+5)$ Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p: x-z+3=0,\ 2x-y+3z-4=0$ i $q: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+5}{1}$.
5) $(2+6+4)$ a) Definisati Ojlerovu karakteristiku površi. b) Skicirati glatke površi roda 0, 1 i 2. c) Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake i dodekaedra.

Geometrija (I-smer), januar 2019. godine

1) $(2+4+2+4)$ a) Navesti opšte formule afinog preslikavanja i objasniti šta je šta. b) Odrediti afino preslikavanje koje slika $\triangle ABC$, $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(-\sqrt{3},1)$, u $\triangle A'B'C'$, $A'(0,1)$, $B'(\sqrt{3},2)$, $C'(\sqrt{3},0)$. c) Da li je preslikavanje izometrija? (obrazložiti) d) Odrediti sliku centra kruga upisanog u $\triangle ABC$ pri ovom preslikavanju.
2) $(6+2+4)$ a) Napisati i dokazati formulu za rastojanje tačke od ravni. b) Navesti teoremu o pramenu ravni. c) Odrediti jednačinu ravni σ koja sadrži pravu $p: \frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0}$ i čije je rastojanje od tačke $T(2,-1,2)$ jednako 1.
3) $(4+4+4)$ Date su kontrolne tačke Bezijerove krive $P_0(3,0)$, $P_1(3,3)$, $P_2(0,3)$. a) Podeliti krivu na dva dela preveći rez u tački $\alpha_2\left(\frac{1}{3}\right)$. b) Povećati stepen "desne" krive za 1. c) Napisati jednačinu krive dobijene spajanjem "leve" i nove "desne" krive. Kog stepena je ta kriva? Skicirati je.
4) $(4+6+2)$ a) Šta je konveksni omotač skupa n tačaka u ravni? Nacrtati primer. b) Opisati algoritam za određivanje konveksnog omotača po izboru i na primeru pokazati kako radi. c) Navesti osobinu konveksnog omotača Bezijerove krive.
5) $(4+2+6)$ a) Navesti imena i nacrtati skicu glatkih površi roda 0 i 1. b) Skicirati njihove poliedarske modele. c) Da li su ove površi orijentabilne? Dokazati.

Geometrija (I-smer), februar 2019. godine

1) $(4+4+2)$ a) Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački. b) Ako je $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(6,0)$, ispitati da li ortocentar H pripada unutrašnjosti $\triangle ABC$. c) Odrediti homogene baricentričke koordinate tačke H u odnosu na $\triangle ABC$.
2) $(5+7)$ a) Nabrojati sve afine transformacije ravni i napisati njihove formule. b) Odrediti sliku kvadrata $ABCD$, čiji je centar koordinatni početak i $A(1,0)$, pri kompoziciji rotacije oko tačke A za ugao $\phi=\frac{\pi}{4}$ i homotetije sa centrom B i koeficijentom $\lambda=-\sqrt{2}$. Skicirati!
3) $(4+2+6)$ a) Skicirati parabolu, napisati njenu kanonsku jednačinu i definisati osnovne elemente. b) Napisati jednačinu kosog hica. c) Sa linije za slobodna bacanja prvo je koš gađao igrač visine $1.9m$, a zatim igrač visine $2.05m$. Ako su obojica loptu izbacila pod početnim uglom $\phi_0=\frac{\pi}{3}$, kom igraču je bila potrebna manja početna brzina? (linija za slobodna bacanja je udaljena od koša $5.8m$, koš je na visini $3.05m$, a za gravitaciono ubrzanje uzeti $g=10m/s^2$)
4) $(4+4+4+2)$ U prostoru su date tačke $O(1,0,3)$, $A(-2,4,1)$, $B(2,0,-1)$ i ravan $\pi: 2x+y+2z-11=0$. a) Odrediti normalnu projekciju duži $[AB]$ na ravan π. b) Odrediti centralnu projekciju sa centrom u tački O duži $[AB]$ na ravan π. c) Odrediti duž simetričnu duži $[AB]$ u odnosu na ravan π. d) Poređati ove četiri duži po dužini, počev od najkraće.
5) $(5+5+2)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 0,3,7,4\rangle$, $p_1=\langle 1,6,2,5\rangle$, $p_2=\langle 5,0,1\rangle$, $p_3=\langle 3,2,1\rangle$, $p_4=\langle 2,3,7,6\rangle$, $p_5=\langle 3,1,0\rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2=\langle 5,0,1\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), jun 2019. godine

1) $(4+2+4)$ U ravni su date tačke $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(4,0)$, $D(2,3)$, $A'(1,0)$, $B'(0,0)$ i $C'(0,1)$. a) Odrediti afino preslikavanje kojim se trougao ABC slika u trougao $A'B'C'$. b) Šta je slika tačke D pri ovom preslikavanju? c) Ako je $D'(2,2)$, odrediti formule projektivnog preslikavanja koje slika četvorougao $ABCD$ u četvorougao $A'B'C'D'$.
2) $(4+6+4)$ a) Definisati centar mase i težište tetraedra. b) Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u težištu. c) Odrediti u kom odnosu centar mase T deli težišnu duž iz temena D tetraedra $ABCD$ ako su mase u temenima $m_A=m_B=m_C=2$ i $m_D=3$.
3) $(4+6)$ a) Odrediti parametrizaciju kruga $\kappa: (x-1)^2+(y+4)^2=9$. b) Odrediti presek kruga κ i prave $p: x=-2+t,\ y=-4+5t$.
4) (10) Odrediti jednačinu prave m koja sadrži tačku $M(2,7,-1)$ i seče prave $p: x-2y+5=0,\ 3y+z-13=0$ i $q: \frac{x}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-5}{-3}$.
5) $(5+5+6)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela. c) Odrediti odnos zapremina kocke i njoj dualnog tela. Skicirati ih!

Geometrija (I-smer), septembar 2019. godine

1) $(4+6)$ a) Dokazati da je $\vec{AB}=\vec{DC}$ ako i samo ako se duži AC i BD polove b) Dat je paralelogram $ABCD$. Neka je E središte stranice BC i S presek dijagonala AC i BD. Odrediti homogene baricentričke koordinate tačaka B, C i D u odnosu na trougao AES.
2) $(6+6)$ Formirati prost poligon od tačaka $P_0=(1,2)$, $P_1=(4,0)$, $P_2=(2,-1)$, $P_3=(6,2)$, $P_4=(7,-2)$, $P_5=(5,3)$, a zatim ga triangulisati. Proveriti da li tačka $M(5,2)$ pripada unutrašnjosti početnog poligona $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ (obrazložiti odgovor).
3) $(6+4+2)$ a) Skicirati hiperbolu, napisati njenu kanonsku jednačinu i definisati osnovne elemente. b) Pokazati da za hiperbolu važi: $|d(M,F_1)-d(M,F_2)|=2a$. c) Formulisati i skicirati optičko svojstvo hiperbole.
4) $(8+2+4)$ Izvesti formule stereografske projekcije iz južnog pola na ravan $z=0$. Skicirati! Šta su slike meridijana i paralela?
5) $(4+3+5)$ a) Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i napisati njene pljosni. b) Odrediti rub, broj komponenata ruba i Ojlerovu karakteristiku. c) Dokazati da Mebijusova traka nije orijentabilna.

Geometrija (I-smer), januar 2020. godine

1) $(4+2+4)$ a) Dokazati da se simetrale unutršnjih uglova trougla seku u jednoj tački. b) Da li ta tačka pripada unutrašnjosti $\triangle ABC$, $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(6,0)$? Zašto? c) Odrediti homogene baricentričke koordinate te tačke u odnosu na $\triangle ABC$.
2) $(9+3)$ Korisik je obeležio sliku pravougaonog oblika sa naspramnim temenima $P(20,20)$ i $Q(120,160)$. Zatim ju je prvo rotirao za 90 stepeni, a onda i preslikao na ceo ekran dimeznije 800×600 bez distorzije (homotetijom). Odrediti formule ove afine transformacije. Da li ova transformacija čuva orijentaciju i uglove? Obrazložiti.
3) $(4+4+4+3)$ Bezijerova kriva $\alpha(t)$, $t\in[0,1]$, je data kontrolnim tačkama $P_0(-1,-4)$, $P_1(-7,2)$, $P_2(5,8)$. a) Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački $t_0=\frac{2}{3}$. b) Povećati stepen "desne" krive za 2. c) Napisati jednačinu "leve" krive ako se njena početna tačka translira za vektor $\vec{v}=(2,3)$. d) Da li je moguće izvršiti glatko lepljenje nove "leve" i "desne" krive? Kog stepena je ta nova kriva? Obrazložiti odgovore.
4) $(4+3+2+4)$ a) Navesti i skicirati sve međusobne položaje pravih p i q u prostoru (napisati uslove u terminima vektora). b) Odrediti međusobni položaj i presečnu tačku (ako postoji) pravih $p:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{4}$ i $q: x+y-2z=0,\ 2x-y+3=0$. c) Da li postoji zajednička normala pravih p i q? Obrazložiti. d) Odrediti jednačinu prave r koja sadrži tačku $R(0,2,0)$ i seče prave p i q.
5) $(4+2+4)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 0,2,7,4\rangle$, $p_1=\langle 1,6,3\rangle$, $p_2=\langle 2,6,1\rangle$, $p_3=\langle 5,0,1\rangle$, $p_4=\langle 6,2,7,3\rangle$, $p_5=\langle 5,4,0\rangle$, $p_6=\langle 3,1,5\rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Skicirati površ. c) Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_5=\langle 5,4,0\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), februar 2020. godine

1) $(4+4+4)$ U ravni su date tačke $P_0(1,2)$, $P_1(-3,1)$, $P_2(4,4)$, $P_3(0,-2)$, $P_4(1,1)$, $P_5(-2,-1)$, $P_6(5,0)$, $P_7(3,-2)$, $P_8(3,3)$. a) Koristeći Grahamov algoritam odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0,\dots,P_8$. b) Izvesti formulu za površinu prostog poligona. c) Izračunati površinu poligona koji čini konveksni omotač.
2) $(4+4+4)$ a) Izvesti formulu za rastojanje tačke od parametrski zadate prave. b) Izvesti formulu za rastojanje tačke od implicitno zadate prave. c) U ravni su date tačka $A(-1,1)$ i prave $p: P(2,2), \vec{p}=(-3,4)$, $q: 5x+12y+6=0$. Kojoj pravoj je tačka A bliža?
3) $(4+8)$ Translacijom svesti na kanonski oblik krivu $4x^2-9y^2+16x+18y-9=0$. Napisati naziv krive i odrediti njene osnovne elemente.
4) $(8+4+2)$ U prostoru su date ravni $\alpha: 2x-2y+z=0$ i $\beta: 2x+y-2z=0$. Neka je f preslikavanje koje predstavlja kompoziciju refleksije u odnosu na ravni α i β redom. Odrediti matricu preslikavanja f. Napisati koje je to preslikavanje (navesti naziv i osnovne elemente). Da li f čuva orijentaciju? (odgovor detaljno obrazložiti)
5) $(2+5+3)$ Definisati Ojlerovu karakteristiku ξ poliedarske površi. Navesti primer površi za koju je $\xi=2$, skicirati je i napisati njenu tabelu povezanosti. Da li je ta površ orijentabilna? (odgovor detaljno obrazložiti)

Geometrija (I-smer), jun 2020. godine

1) $(4+4+4)$ a) Izvesti jednačinu ravnoteže klackalice i formulu za centar mase. b) Na jednom kraju poluge dužine $3m$ sedi dete mase $12kg$, a na drugom kraju je džak sa igračkama mase $4kg$. Na kom rastojanju (u **centimetrima**) od deteta treba postaviti oslonac da bi poluga bila u ravnoteži? c) Ako se jedan kraj poluge postavi na zemlju, a džak sa igračkama pomeri na sredinu, koliku masu podiže dete držeći drugi kraj poluge?
2) $(4+4+4)$ a) Definisati afina preslikavanja ravni i napisati opšte formule. b) Nabrojati afina preslikavanja koja čuvaju površinu. Koja od njih **ne čuvaju** uglove? c) Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $C(-1,1)$ i koeficijentom $\lambda = 2$.
3) $(2+5+5)$ a) Napisati parametarsku jednačinu kosog hica. b) Sa vertikalne litice visine $12m$ u more je bačena lopta pod uglom $30°$, početnom brzinom $8m/s$. Posle koliko vremena će lopta upasti u vodu? Na kojoj udaljenosti od podnožja litice će biti tačka udara o površinu vode? Uzeti da je gravitaciono ubrzanje $10m/s^2$.
4) $(4+5+3)$ Odrediti ortonormirani koordinatni sistem vezan za ravan $\alpha : 3x - 4y = 0$. Napisati parametarsku jednačinu kruga κ koji se nalazi u preseku ravni α sa jediničnom sferom σ čiji je centar u koordinatom početku. Šta je slika kruga κ pri streografskoj projekciji sa centrom u tački $N(0,0,1)$ na ravan $z = 0$? (obrazložiti)
5) $(4+4+4)$ Napisati tabelu povezanosti oktaedra, izračunati mu Ojlerovu karakteristiku i rod. Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni. Skicirati oktaedar i njemu dualno Platonovo telo.

Geometrija (I-smer), avgust 2020. godine

1) $(2+4+4)$ U prostoru su date tačke $A(1,4,-2)$, $B(3,0,0)$, $C(-1,2,1)$ i $D(2,2,0)$. a) Da li ove tačke mogu biti temena tetraedra? Obrazložiti. b) Ukoliko je odgovor pod a) potvrdan, izračunati zapreminu i površinu tog tetraedra. Ukoliko je odgovor odričan, izračunati površinu prostog poligona čija su temena te tačke. c) Da li tačka $M(2,3,1)$ pripada unutrašnjosti tetraedra/poligona?
2) $(4+8)$ a) Definisati izometrije ravni i nabrojati ih. Koje od tih izometrija su kretanja? b) Neka je f kompozicija smicanja u odnosu na y-osu sa koeficijentom $k_1 = -2$, smicanja u odnosu na x-osu sa koeficijentom $k_2 = \frac{1}{2}$ i smicanja u odnosu na y-osu sa koeficijentom $k_3 = -1$. Odrediti formule preslikavanja f. Da li je f izometrija? Da li je kretanje? Šta je slika koordinatnog početka pri preslikavanju f?
3) $(6+2+4)$ U ravni su date tačke $F_1(2,0)$ i $F_2(-2,0)$. a) Odrediti geometrijsko mesto tačaka čiji je zbir rastojanja od tačke F_1 i tačke F_2 jednako 8 (napisati jednačinu). b) Koja kriva je u pitanju? c) Ako je ova kriva orbita nekog nebeskog tela, da li se i posle koliko vremena to telo vraća u početni položaj?
4) $(4+2+6)$ Navesti formulu za ugao između prave i ravni. Skicirati. Izračunati ugao između prave $p:\ P(-1,0,1)$, $Q(1,0,-1)$ i ravni $\alpha : x = t-2,\ y = s+2t-2,\ z = -s,\ s,t \in \mathbb{R}$.
5) $(5+3+6)$ a) Nabrojati sva Platonova tela i za svako napisati broj temena, ivica i pljosni. Navesti sve parove dualnih tela i skicirati jedan par (po izboru). b) Dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela.

Geometrija (I-smer), septembar 2020. godine

1) $(6+4)$ Odrediti ortocentar H i centar opisanog kruga O oko trougla ABC, $A(-3,2)$, $B(-1,2)$, $C(7,-10)$. Koje od ovih tačaka se nalaze **izvan** $\triangle ABC$? Obrazložiti.
2) $(6+3+5)$ a) Odrediti formule preslikavanja f kojim se trougao iz prethodnoh zadatka preslikava u trougao PQR, $P(0,0)$, $Q(3,4)$, $R(0,4)$. b) Da li su trouglovi ABC i PQR podudarni? Obrazložiti. c) U koju tačku se slika težište T trougla ABC? Da li je ta tačka neka od značajnih tačaka trougla PQR? Ako jeste, navesti koja tačka je u pitanju.
3) $(4+4+4)$ a) Napisati definiciju Bezijerove krive stepena 2 i skicirati je. b) Napisati matričnu reprezentaciju te krive. c) Dokazati da je svaka Bezijerova kriva stepena 2 deo parabole.
4) $(5+5+2)$ a) Odrediti tačku prodora M prave $p:\ 2x - y = 0,\ y + z - 2 = 0$ kroz ravan α određenu tačkom $A(0,1,-1)$ i vektorima $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$. b) Odrediti tačku $P \in p$ čije je rastojanje od ravni α jednako $\sqrt{3}$. c) Da li je tačka P jedinstvena?
5) $(5+2+5)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 1,6,7,0\rangle$, $p_1 = \langle 0,7,4,3\rangle$, $p_2 = \langle 1,6,5,2\rangle$, $p_3 = \langle 4,6,5\rangle$, $p_4 = \langle 2,5,4\rangle$, $p_5 = \langle 0,1,3\rangle$, $p_6 = \langle 6,4,7\rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Skicirati površ. c) Izvršiti (ako je moguće) usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_3 = \langle 4,6,5\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), dodatni rok, septembar 2020. godine

1) (10) Dat je trougao ABC. Neka su M i N tačke takve da je $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NB}$. Ako je $\{P\} = CN \cap BM$ i $\{X\} = AP \cap BC$, odrediti u kom odnosu tačka X deli duž BC.
2) (8+4) Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p : 3y-4z+9 = 0,\ x = 0$, i $q : 2x-2y+z-21 = 0,\ 4y + 3z - 13 = 0$.
3) $(4 + 6 + 4)$ Objasniti rečima šta znači afina invarijantnost Bezijerove krive. Ako je kontrolni poligon Bezijerove krive α: $P_0(1, -2)$, $P_1(6, 6)$, $P_2(-4, 1)$, $P_3(11, -4)$, primenom De Kasteljau algoritma podeliti Bezijerovu krivu na dve krive i odrediti joj tangentu u tački $\alpha\left(\frac{4}{5}\right)$. Skicirati algoritam.
4) $(5+3+4)$ Izvesti formule rotacije oko y koordinatne ose. Navesti Ojlerovu teoremu o dekompoziciji ortogonalne matrice. Odrediti formule rotacije oko prave p koja sadrži tačku $P(2, -1, 2)$ i paralelna je y-osi.
5) $(4 + 8)$ Definisati triangulaciju prostog poligona i nacrtati sliku. Sortirati tačke $P_0 = (4, 5), P_1 = (0, 4), P_2 = (5, 1), P_3 = (2, -2), P_4 = (3, 1), P_5 = (1, -1), P_6 = (6, -2), P_7 = (-1, 2)$ tako da formiraju prost poligon, a zatim taj poligon triangulisati.

Geometrija (I-smer), januar 2021. godine

1) $(4+2+4)$ a) Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački. b) Da li ta tačka pripada **unutrašnjosti** $\triangle ABC$, $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(1, -2)$? Zašto? v) Odrediti **nehomogene** baricentričke koordinate te tačke u odnosu na $\triangle ABC$.
2) $(4 + 5 + 5)$ a) Definisati afina preslikavanja ravni i napisati opšte formule. b) Nabrojati afina preslikavanja koja čuvaju odnos dužine i širine. Koja od njih **ne čuvaju** uglove? v) Odrediti formule rotacije sa centrom u tački $C(-1, 1)$, za ugao $\phi = \frac{5\pi}{3}$.
3) $(4 + 3 + 4 + 5)$ a) Napisati parametarsku jednačinu kosog hica. b) Od čega zavisi ubrzanje pri kretanju niz strmu ravan bez početne brzine? v) Sa vrha krova pod nagibom od $30°$ počinje da se kotrlja grudva snega bez početne brzine. Koliku brzinu će dostići na kraju krova dužine $10m$? Ako je rastojanje od kraja krova do zemlje $10m$, koliko vremena će proteći od početka kretanja niz krov, pa dok grudva ne padne na zemlju? Uzeti da je gravitaciono ubrzanje $10m/s^2$. Zanemariti trenje i otpor sredine.
4) (10) Odrediti normalnu projekciju prave $p : \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{-2}$ na ravan $\alpha : x + y + z - 2 = 0$.
5) $(4 + 2 + 4)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 0, 1, 4, 3\rangle$, $p_1 = \langle 0, 6, 8, 2\rangle$, $p_2 = \langle 1, 2, 5, 4\rangle$, $p_3 = \langle 8, 7, 1, 2\rangle$, $p_4 = \langle 2, 0, 3, 5\rangle$, $p_5 = \langle 0, 1, 7, 6\rangle$, $p_6 = \langle 6, 8, 5, 3\rangle$, $p_7 = \langle 6, 3, 4, 7\rangle$, $p_8 = \langle 4, 5, 8, 7\rangle$. a) Odrediti Ojlerovu karakteristiku te površi i rod (ako postoji). b) Skicirati površ. v) Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_1 = \langle 0, 6, 8, 2\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), februar 2021. godine

1) $(6 + 4)$ Odrediti površinu i orijentaciju $\triangle ABC$, $A(0, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 1)$. Da li se tačke A i C nalaze sa iste strane prave BT, gde je T težište $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) $(6 + 4 + 2)$ U početnom trenutku dodir jednog prsta je registrovan u tački $P_0(40, 40)$, a drugog u tački $Q_0(100, 120)$. U sledećem trenutku prvi prst se nalazi u tački $P_1(320, 200)$, a drugi u tački $Q_1(500, 440)$. Uvećati sliku čija su naspramna temena $A(20, 20)$ i $C(120, 160)$ za odnos dužina $\lambda = P_1Q_1 : P_0Q_0$, pri čemu se središte duži P_0Q_0 preslikava u središte duži P_1Q_1. Napisati formule odgovarajućeg afinog preslikavanja. Odrediti slike tačaka A i C pri ovom preslikavanju. Da li čitava uvećana slika staje na ekran dimenzija 800×600 piksela?
3) $(4 + 4 + 6)$ a) Napisati parametarsku jednačinu Bezijerove krive stepena 2. b) Izvesti njenu matričnu reprezentaciju. v) Napisati jednačinu Bezijerove krive definisane na intervalu $[3, 8]$ čije su kontrolne tačke $P_0(-3, -1)$, $P_1(2, 7)$, $P_2(-8, 2)$.
4) $(4+2+6)$ Navesti formulu za ugao između dve ravni. Skicirati. Odrediti ravan koja sadrži pravu $p :\ P(-1, 0, 1),\ Q(1, 0, -1)$ i sa ravni $\alpha : x + 2y - 2z + 1 = 0$ zaklapa ugao $\phi = \frac{\pi}{4}$.
5) $(4+4+4)$ Napisati tabelu povezanosti kocke, izračunati joj Ojlerovu karakteristiku i rod. Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni. Skicirati kocku i njoj dualno Platonovo telo.

Geometrija (I-smer), jun 2021. godine

1) $(4+4+2+2)$ Dat je kvadrat $ABCD$. Odrediti vezu između koordinata (x, y) u reperu Ce i koordinate (x', y') u reperu Bf ako je $e = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$ i $f = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Odrediti koordinate temena u oba repera. Koji tip transformacija ortonormiranih repera se ovde javlja? Skicirati!
2) $(4+3+4)$ a) Napisati parametarsku i implicitnu jednačinu ravni. Skicirati i označiti odgovarajuće elemente. b) U kom međusobnom položaju mogu biti dve ravni u prostoru? v) Skicirati ravni $\alpha : y - 2z + 4 = 0$ i $\beta : x - 3y + 2z + 6 = 0$.
3) $(3+6+3)$ a) Formulisati Keplerove zakone. b) Ekcentricitet Jupitera je ~ 0.05, a veća poluosa $\sim 5AJ$. Odrediti najmanje (perihel) i najveće (afel) rastojanje Jupitera od Sunca. v) Koliko godina je potrebno Jupiteru da obiđe oko Sunca?
4) $(6+4+6)$ a) Napisati matrice rotacija oko koordinatnih osa u prostoru. b) Navesti Ojlerovu teoremu o dekompoziciji ortogonalne matrice (II Ojlerova teorema). v) Odrediti formule rotacije oko prave p koja sadrži tačku $P(2, -1, 2)$ i paralelna je y-osi.
5) $(2+5+2)$ Definisati Ojlerovu karakteristiku ξ poliedarske površi. Navesti primer površi za koju je $\xi = 0$, skicirati je i napisati njenu tabelu povezanosti. Da li je ta površ orijentabilna? (odgovor detaljno obrazložiti)

Geometrija (I-smer), jun 2, 2021. godine

1) $(4+2+3+3)$ U ravni je dat trougao ABC, $A(0, -2)$, $B(4, -5)$, $C(6, 6)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu kruga opisanog oko trougla ABC. b) Odrediti koordinate ortocentra H trougla ABC. v) Odrediti tačke simetrične ortocentru u odnosu na stranice trougla. g) Da li te tačke pripadaju krugu opisanom oko trougla ABC?
2) $(4+3+3)$ a) Izvesti formule stereografske projekcije iz severnog pola na ravan $z = 0$. b) Objasniti šta je šta u osnovnoj formuli sferne geometrije: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$. Skicirati! v) Izračunati rastojanje između tačaka $A(60^\circ\ N, 30^\circ\ E)$ i $B(30^\circ\ S, 60^\circ\ W)$ na sferi.
3) $(5+5+4)$ Bezijerova kriva $\alpha(t)$, $t \in [0, 1]$, je data kontrolnim tačkama $P_0(1, -5)$, $P_1(-5, 1)$, $P_2(7, 7)$. a) Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački $t_0 = \frac{1}{3}$. b) Povećati stepen "desne" krive za 1. v) Napisati jednačinu "leve" krive ako se njena početna tačka translira za vektor $\vec{v} = (-1, 2)$.
4) $(2+5+5)$ a) Definisati mimoilazne prave. b) Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p : 3y - 4z + 9 = 0$, $x = 0$, i $q : \frac{x-10}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-4}$.
5) $(5+2+5)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Za svako Platonovo telo navesti njemu dualno telo. v) Odrediti odnos zapremina tetraedra i njemu dualnog tela. Skicirati ih!

Geometrija (I-smer), septembar 2021. godine

1) $(4+2+4)$ Definisati vektorski proizvod i napisati tablicu vektorskog množenja u ortonormiranoj bazi. Ispitati kolinearnost tačaka $A(2, 3)$, $B(4, 7)$ i $C(-2, 0)$. Ako su tačke kolinearne, odrediti odnos u kome tačka A deli duž BC. Ukoliko tačke nisu kolinearne, ispitati orijentaciju trougla ABC.
2) $(6+2+6)$ Dat je pravilan petougao $ABCDE$. Ako su date baze $e = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ i $f = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA})$, odrediti formule transformacija koordinata iz repera Ae u reper Cf, kao i inverzne formule. Da li ove formule predstavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera (obrazložiti)? Odrediti koordinate temena B, D i E u oba repera.
Pomoć: Odnos dijagonale i stranice pravilnog petougla jednak je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3) $(4+4+6)$ Napisati kanonsku i parametarsku jednačinu hiperbole. Translacijom svesti hiperbolu $x^2 - 4y^2 - 2x - 32y + 36 = 0$ na kanonski oblik, a zatim je skicirati i odrediti joj osnovne elemente.
4) $(4+6)$ Šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni π? Odrediti parametarski jednačinu kruga sa centrom u tački $C(1, 1, 1)$ koji pripada ravni $\pi : 2x + y - 2z - 1 = 0$.
5) $(6+6)$ Primenom Grahamovog algoritma odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0 = (2, 2)$, $P_1 = (-2, 1)$, $P_2 = (3, -2)$, $P_3 = (0, -5)$, $P_4 = (1, -2)$, $P_5 = (1, -4)$, $P_6 = (4, -5)$, $P_7 = (-3, -1)$. Dobijeni poligon triangulisati. Skicirati!

Geometrija (I-smer), septembar 2, 2021. godine

1) $(4+3+5)$ U ravni je dat trougao ABC, $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(-2,5)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu kruga upisanog u trougao ABC. b) Odrediti koordinate težišta T trougla ABC. v) Odrediti **homogene** baricentričke koordinate težišta i centra upisanog kruga u odnosu na trougao ABC.
2) $(4+4+4)$ a) Napisati parametarsku i implicitnu jednačinu ravni α koja sadrži tačku $A(1,0,-2)$ i pravu $a: x+y+z=0, x-y+2z=0$. b) Skicirati i označiti odgovarajuće elemente. v) Izvesti formulu refleksije u odnosu na ravan α.
3) $(4+4+4)$ a) Podeliti Bezijerovu krivu $\alpha_2(t)$ čije su kontrolne tačke $P_0(-3,2)$, $P_1(2,7)$, $P_2(-8,2)$ na dva dela, praveći rez u tački $t_0=\frac{1}{5}$. b) Odrediti sliku "leve" krive pri refleksiji u odnosu na tangentu u tački $t_0=\frac{1}{5}$. v) Da li je kriva dobijena u delu b) Bezijerova? Zašto? Detaljno obrazložiti.
4) $(4+4+4)$ a) Definisati orijentabilnost poliedarske površi. b) Dokazati da je oktaedar orijentabilan. v) Izračunati zapreminu oktaedra upisanog u jediničnu kocku.
5) $(6+6)$ a) Izvesti formulu za računanje površine prostog poligona. b) Izračunati površinu prostog poligona čija su temena $P_0(1,1)$, $P_1(11,-4)$, $P_2(6,11)$, $P_3(1,6)$, $P_4(-3,4)$, $P_5(-1,1)$.

Geometrija (I-smer), januar 2022. godine

1) $(5+3+4)$ U ravni su date tačke $P_0(1,2)$, $P_1(-3,2)$, $P_2(4,5)$, $P_3(0,-1)$, $P_4(-1,-3)$, $P_5(2,3)$, $P_6(1,1)$, $P_7(-2,0)$, $P_8(3,-2)$, $P_9(5,1)$. a) **Grahamovim algoritmom** odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0,\dots,P_9$. b) Ako galerija ima oblik dobijenog konveksnog omotača, postaviti kamere u njegova temena tako da pokrivenost unutrašnosti bude optimalna. Koliko je kamera potrebno? v) Da li postoji triangulacija konveksnog omotača takva da sve unutrašnje tačke leže unutar jednog trougla? U slučaju potvrdnog odgovora, odrediti tu triangulaciju.
2) $(4+4+4)$ a) Izvesti formule rotacije oko proizvoljne tačke u ravni (napisati odgovarajuću matricu preslikavanja). b) Shta sve može biti kompozicija dve rotacije u ravni? Detaljno obrazložiti. v) Napisati primer dve rotacije u ravni (sa različitim centrima) čija je kompozicija translacija za nenula vektor.
3) $(4+4+4)$ a) Odrediti centar i poluprečnik kruga $\kappa: x^2+y^2-6x+4y+12=0$. b) Odrediti parametrizaciju kruga κ dužinom luka. v) Odrediti presek prave $p: x-y-6=0$ i kruga κ.
4) (10) Odrediti rastojanje između mimoilaznih pravih $p: \frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{0}$ i $q: \frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-15}{-5}$.
5) $(4+2+4+4)$ Odrediti tabelu povezanosti oktaedra. Izračunati mu Ojlerovu karakteristiku i rod. Dokazati da je oktaedar orijentabilan. Skicirati oktaedar i njemu dualno Platonovo telo.

Geometrija (I-smer), februar 2022. godine

1) $(4+4+4)$ a) Definisati centar mase sistema tri tačke i dokazati da ne zavisi od izbora referentne tačke O. b) Neka se centar mase tri objekta nalazi u tački $T(3,4)$. Odrediti koordinate objekta A_3 mase $m_3=8\,kg$ ako preostala dva objekta imaju koordinate i masu $A_1(1,3)$, $m_1=2\,kg$ i $A_2(3,2)$, $m_2=5\,kg$. v) Odrediti **nehomogene** baricentričke koordinate tačke T u odnosu na trougao $A_1A_2A_3$.
2) $(4+4+4)$ U ravni su date tačke $P(2,1)$ i $Q(4,5)$. Odrediti formule afinog preslikavanja f koje slika tačku P u tačku Q ako je f: a) translacija; b) refleksija; v) rotacija oko koordinatnog početka. Ako ne postoji odgovarajuće preslikavanje f, obrazložiti zašto ne postoji.
3) $(8+4)$ Kubna Bezijerova kriva je zadata kontrolnim tačkama $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,1)$, $P_3(2,0)$. a) Koristeći De-Kasteljau algoritam, podeliti krivu na tri, praveći rez u tačkama $t_0=\frac{1}{2}$ i $t_1=\frac{3}{4}$. b) Nakon podele dozvoljena je promena "srednje" krive. Odrediti uslove koje nove kontrolne tačke te krive moraju da zadovolje da bi čitava kriva i dalje ostala glatka.
4) $(4+4+4)$ a) Odrediti prodor prave $p: \frac{x}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{1}$ kroz trougao ABC, ako je $A(-4,2,0)$, $B(-2,4,-2)$, $C(2,4,-2)$. b) Kako se računa ugao između prave i ravni? Skicirati. v) Odrediti ugao koji prava p zaklapa sa ravni trougla ABC.
5) $(3+5+4)$ Definisati prostu poliedarsku površ. Navesti primer apstraktne poliedarske površi koja ima rub, napisati joj tabelu povezanosti i skicirati je. Definisati orijentabilnost poliedarske površi i ispitati da li je navedeni primer orijentabilan.

Geometrija (I-smer), jun 1 2022. godine

1) $(6+4)$ Odrediti površinu i orijentaciju $\triangle ABC$, $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(0,2)$. Da li se tačke A i C nalaze sa iste strane prave BS, gde je S centar upisanog kruga $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) $(4+6+2)$ a) Napisati parametarsku jednačinu prave $p: x+2y-z=0$, $x-y+2z=0$. b) Odrediti formule rotacije za ugao $\frac{\pi}{3}$ oko prave p. v) Shta je slika koordinatnog početka pri ovoj rotaciji?
3) $(4+4+6)$ a) Skicirati elipsu i definisati njene osnovne elemente. b) Navesti i dokazati **fokusnu** osobinu elipse. v) Na bilijarskom stolu oblika elipse čije su ose $a=1m$ i $b=80cm$ lopta je udarena sa pozicije udaljene $30cm$ od centra elipse (u pravcu duže ose) pod uglom od $60°$. Da li će lopta proći kroz njoj centralno simetričnu tačku u odnosu na centar? Ako hoće, posle koliko odbijanja o ivicu stola? Odgovore detaljno obrazložiti.
4) $(4+6)$ Shta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni π? Odrediti parametarsku jednačinu kruga poluprečnika $r=3$, sa centrom u tački $A(2,1,0)$ koji pripada ravni $\pi: x=2+3t+s$, $y=1-4t+2s$, $z=2s$, $s,t\in\mathbb{R}$.
5) $(5+4+5)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Za svako Platonovo telo navesti njemu dualno telo. v) Odrediti odnos površina kocke i njoj dualnog tela. Skicirati ih!

Geometrija (I-smer), jun 2 2022. godine

1) $(4+8)$ a) Izvesti jednačinu ravnoteže klackalice i formulu za centar mase. b) Sportski ribolovac je harpunom ulovio veliku belu ajkulu. Ajkula je neko vreme pružala otpor, ali se onda umirila na udaljenosti $120m$ od broda. Ribolovac povlači ajkulu užetom privezanim za harpun, pri čemu se brod (iz početnog stanja mirovanja) pomera $24m$ u pravcu ajkule. Kolika je masa ajkule ako je masa broda $3t$? Zanemariti otpor sredine.
2) $(4+4+4)$ Dat je $\triangle ABC$, $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(0,2)$. a) Odrediti simetralu s_α unutrašnjeg ugla kod temena A. b) Odrediti simetralu n_{BC} stranice BC. v) Odrediti sliku tačke A pri kompoziciji refleksije u odnosu na pravu s_α i refliksije u odnosu na pravu n_{BC}.
3) $(6+6)$ a) Odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0(1,-5)$, $P_1(-5,1)$, $P_2(7,7)$, $P_3=(2,-2)$, $P_4=(3,1)$, $P_5=(1,-4)$, $P_6=(4,-5)$, $P_7=(-3,-1)$. b) Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke temena konveksnog omotača iz dela a). Kog stepena je ta kriva?
4) $(4+4+4+2)$ U prostoru su date tačke $C(1,1,0)$, $A(-2,2,1)$, $B(2,1,-2)$ i ravan $\pi: z=-2$. a) Odrediti normalnu projekciju duži $[AB]$ na ravan π. b) Odrediti centralnu projekciju sa centrom u tački C duži $[AB]$ na ravan π. v) Odrediti stereografsku projekciju duži $[AB]$ iz severnog pola sfere sa centrom u koordinatnom početku koja sadrži tačku A na ravan π. g) Koja duž je najkraća? Skicirati.
5) $(4+4+2)$ a) Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i napisati njene pljosni. b) Odrediti rub, broj komponenata ruba i Ojlerovu karakteristiku. v) Da li Mebijusova traka ima rod? Ako ima, odrediti ga.

Geometrija (I-smer), septembar 1, 2022. godine

1) $(4+8)$ Ispitati koplanarnost tačaka $A(1,1,0)$, $B(-1,3,-2)$, $C(2,-3,1)$ i $D(0,1,1)$. Ako su koplanarne, ispitati da li postoji tačka koja se nalazi unutar trougla čija su temena preostale tri tačke. Ako nisu, odrediti zapreminu tetraedra $ABCD$ (izvesti formulu za računanje zapremine).
2) $(4+4+4)$ a) Definisati prostu poligonsku liniju. Skicirati primer poligonske linije koja je prosta i koja nije. b) Formulisati uslov da tačka pripada unutrašnjosti poligona. Skicirati primere. v) Izvesti formulu za računanje površine prostog poligona.
3) $(4+6+2)$ a) Odrediti presečne tačke A i B parabole $y^2=4x-6$ i prave $-2x+y+3=0$. b) Odrediti parametarsku jednačinu dela parabole između tačaka A i B. v) Skicirati!
4) $(7+3+2+2)$ Odrediti kompoziciju rotacije oko y-ose i refleksije u odnosu na xz-ravan. Skicirati! Da li je dobijeno preslikavanje izometrija? Da li je kretanje? (Odgovore detaljno obrazložiti)
5) (10) Skicirati poliedarski model torusa, odrediti mu tabelu povezanosti, Ojlerovu karakteristiku i rod.

Geometrija (I-smer), septembar 2, 2022. godine

1) $(8+4)$ Odrediti površinu i orijentaciju trougla ABC, $A(0,1)$, $B(-1,4)$, $C(1,1)$. Da li se tačke A i B nalaze sa iste strane prave CS, gde je S centar upisanog kruga $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) $(6+6+2)$ Korisnik je obeležio pravougaonik (recimo sliku) sa naspramnim temenima $P(360,420)$ i $Q(520,520)$. Odrediti formule afine transformacije koja taj pravougaonik rotira oko tačke P za ugao od $90°$, a zatim preslikava na ceo ekran dimenzija 800×600 bez distrozije, tj. homotetijom. Skicirati!
3) $(8+4)$ Predstaviti deo kruga $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ kao racionalnu Bezijeovu krivu. Skicirati.
4) $(4+8)$ a) Navesti teoremu o pramenu ravni. b) Odrediti vrednost parametra λ tako da ravni $\alpha: 3x-y+z-17=0$, $\beta: x+2y-z-8=0$ i $\gamma: 2x-3y+2z+\lambda=0$ pripadaju istom pramenu.
5) $(5+5)$ Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i odrediti mu tabelu povezanosti. Dokazati da je Mebijusova traka neorijentabilna.