

Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović

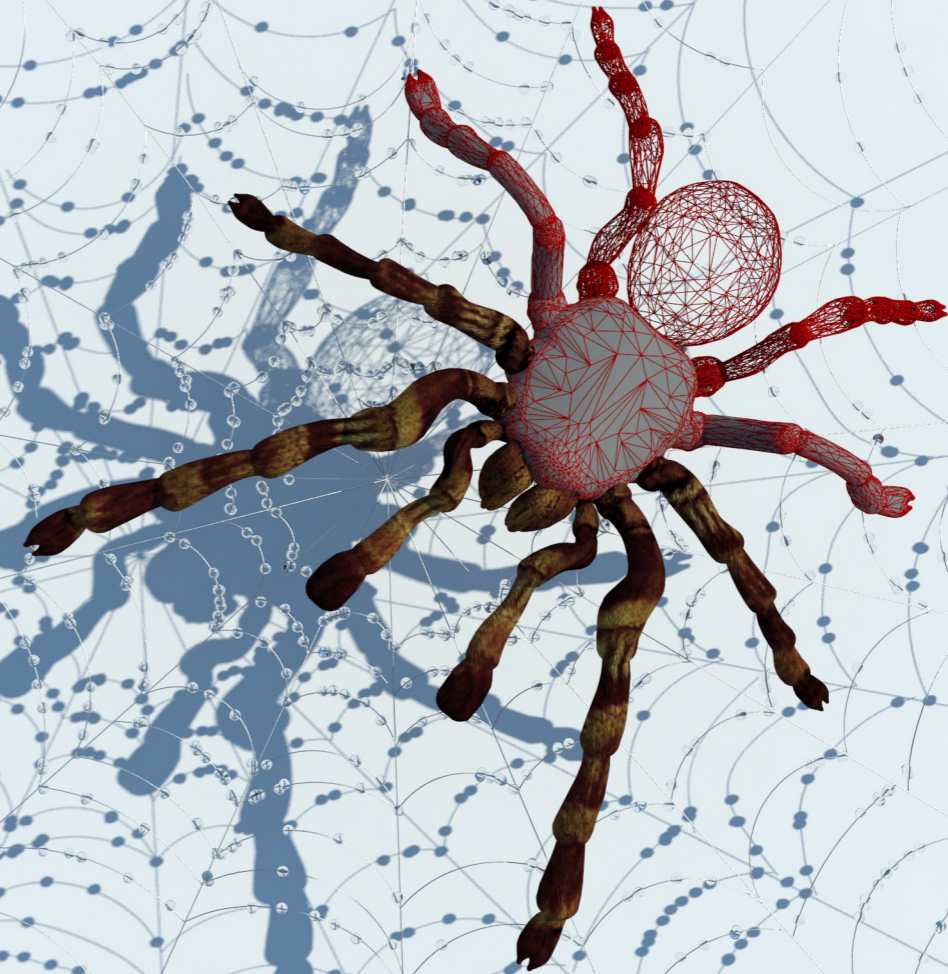
Geometrija za informatičare

„Cilj ove knjige je da na objedinjen i uniforman način prezentuje izbor geometrijskih znanja potrebnih informatičarima. Knjiga može da služi ne samo kao udžbenik za predmet *Geometrija*, već i za druge slične predmete, pa i kao zanimljivo štivo svima koji vole i geometriju i računarstvo. *Geometrija za informatičare* je značajna i zbog toga što je jedna od retkih knjiga iz ove oblasti na srpskom jeziku.”

prof. dr Predrag Janičić

„Autori su našli pravi balans i meru između formalnog uvođenja pojmova, mnogobrojnih primera i uporednih objašnjenja datih na intuitivnom nivou. Zato će ovaj materijal biti vrlo koristan i interesantan, ne samo studentima predmeta *Geometrija*, već i široj populaciji koja se bavi računarstvom i informatikom.”

dr Miroslava Antić



ISBN 978-86-7589-106-2



9 788675 891062

Matematički fakultet
Beograd, 2015. godine

TIJANA ŠUKILOVIĆ, SRĐAN VUKMIROVIĆ

GEOMETRIJA ZA INFORMATIČARE



МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД, 2015. ГОДИНЕ



Predgovor

Ova knjiga je udžbenik za kurs *Geometrija*, na drugoj godini smera Informatika, Matematičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu. Autori su predavači na tom kursu od 2006. godine.

Tokom svih ovih godina kurs se menjao i evoluirao, tako da je njegov sadašnji sadržaj predstavljen sa prvih osam poglavlja knjige. U poglavljima *Izometrije* i *Krive i površi* ima zahtevnijeg sadržaja koji prevazilazi okvire kursa Geometrija.

Deo knjige koji smo nazvali *Dodatak*, sadrži određen broj izbornih tema. Neke od tih tema, a i mnoge druge, bile su teme studentskih seminarskih radova i programerskih projekata. Te napredne teme su pogodne i za srednje napredan kurs primenjene geometrije na nivou master ili doktorskih studija.

Knjigu mogu koristiti svi oni kojima su potrebna znanja iz praktične geometrije, ukoliko imaju neka osnovna matematička predznanja (na primer na nivou gimnazijske matematike). Dakle, pretpostavljamo da čitalac ima osnovna znanja iz elementarne geometrije, trigonometrijskih funkcija, linearne algebre i diferencijalnog računa, a ako ih nema, upućujemo ga na odgovarajuću literaturu.

Cilj nam je bio da geometriju predstavimo na način koji je pogodan za implementaciju na računaru, sa manje formalizma, a više primera. Kad god je to bilo pogodno, pokušali smo da vidimo geometriju kroz primere iz svakodnevnog života. Neke od tema su izvan granica geometrije i zalaze u topologiju, analizu, mehaniku ili statiku. Hteli smo da čitalac razume da su matematičke discipline i njihove primene međusobno povezane. Često je za pravljenje neke matematičke simulacije neophodno i dobro poznavanje fizike.

U prvoj glavi uvodimo vektore u euklidskoj ravni i prostoru geometrijski – kao klase ekvivalencije usmerenih duži koje imaju isti pravac, smer i intenzitet. Definišemo koordinate tačkaka i vektora, kao i transformacije koordinatnih sistema. Veoma mnogo pažnje je posvećeno skalarnom, vektorskom i mešovitom proizvodu i njihovim primenama: Određivanje orijentacije i površine trougla, da li tačka pripada trouglu, zapreminama tela. . . Orijehtacija u ravni i prostoru je uvedena intuitivno, ali pažljivo, i što će čitalac verovatno zapaziti – vrlo relativno.

Druga glava predstavlja kratak pregled analitičke geometrije ravni: Pravih, polupravih, duži, krugova i konusnih preseka, tj. krivih drugog reda. Istaknuto je parametarsko zadavanje objekata, jer je ono u primenama korisnije od implicitnog. Detaljno se razmatraju osobine konusnih preseka: Elipse, hiperbole i parabole, koje su važne u geometriji i primenama. Ipak, u cilju smanjenja obima kursa, to poglavlje, kao i poglavlje koje se odnosi na krive drugog reda,

može da se izostavi.

Treća glava sadrži neke osnovne elemente računarske geometrije i bavi se proučavanjem poligona. Definišemo unutrašnjost i triangulaciju prostog poligona i dajemo konkretne načine za njihovo određivanje. Takođe, izvodimo formulu za površinu prostog poligona, što je u literaturi veoma teško naći u korektnom obliku. Opisujemo i algoritme za konveksni omotač i Delonijevu triangulaciju skupa tačaka ravni.

Četvrta glava je posvećena analitičkom zadavanju pravih, duži, ravni u tro-dimenzionom euklidskom prostoru i njihovim međusobnim odnosima. Iako je geometrijski važno, poglavlje o mimoilaznim pravama nije toliko značajno u računarstvu, pa ga čitalac ne mora detaljno proučavati.

U petoj glavi formalno uvodimo afina preslikavanja u proizvoljnoj dimenziji. Koga taj formalizam ne interesuje, može odmah da pređe na preslikavanja u ravni. Predstavljanje afinih preslikavanja matricama je lako, ali nije očigledno. Pošto ima veliku primenu u računarstvu, treba mu posvetiti mnogo pažnje, kao i konkretnim primerima afinih preslikavanja ravni.

Izometrijama smo posvetili šestu glavu. Poglavlje o izometrijama ravni je jednostavno i preporučujemo ga za prvo čitanje. Ostatak ove glave je za naprednije studente ili kao referenca onima koji se bave računarskom grafikom. Radi matematičke potpunosti, dokazujemo da je svaka izometrija euklidskog prostora afino preslikavanje i karakterišemo afine izometrije. Izometrijama prostora, rotacijama i Ojlerovim uglovima smo posvetili posebnu pažnju jer je kompletne literature na ovu temu malo, a primene u robotici i računarskoj grafici su brojne. Kao dodatna tema, može se koristiti poglavlje *Kvaternioni i izometrije prostora iz Dodatka*.

Sedma glava je posvećena poliedarskim površima koje predstavljaju važan način predstavljanja prostornih objekata u raznim oblastima primena. Ne ulazeći u tehničke detalje, skoncentrisali smo se na neke jednostavne geometrijske i topološke pojmove: Povezanost, rub, orijentabilnost. Pri tome, mnoge činjenice za koje su potrebni objekti i metode topologije nisu strogo definisane, niti dokazane.

Osma glava odnosi se na najosnovnije pojmove u vezi parametrizovanih krivih i površi. Delovi ovog poglavlja, kao što su primeri, mogu da se zanemare u prvom čitanju. Krivima dajemo fizičko tumačenje kad god je moguće (ravnomoerno ubrzano i kružno kretanje, lančanica, cikloida...). Poglavlje koje se odnosi na Beziјerove krive sadrži neke važne algoritme čiji su dokazi tehnički, te se mogu zaobići. Poglavlje koje se bavi uopštenjima Beziјerovih krivih je preglednog karaktera, sadrži interesantne primere i namenjeno je naprednijim studentima.

U poglavlju *Dodatak* obrađene su razne teme koje su detaljnije objašnjene u uvodu tog poglavlja. Na primer, u računarskim igricama i simulacijama prirodnih procesa, objekti se bacaju, padaju, prevrću, klize... Da bismo razumeli geometriju njihovog kretanja, bavili smo se kosim hicem, težištem tela, strmom ravni. Poglavlje o homogenim koordinatama i osnovama projektivne geometrije smo dodali jer su te teme važne za razumevanje nekih elemenata računarske geometrije i obrade slika.

Oznake u tekstu su standardne. Trudili smo se da razlikujemo tačke euklidenskog prostora \mathbb{E}^n , vektore pridruženog vektorskog prostora \mathbb{V}^n i vektore koordinata \mathbb{R}^n ; preslikavanje od matrice preslikavanja, itd. Nažalost, ako želimo da tekst ostane čitljiv, teško je biti dosledan, pa bar jedan od ta dva cilja verovatno nismo postigli. Oznaku \square koristimo za kraj dokaza, \diamond za kraj primera, a E za jediničnu matricu.

Knjiga je složena u \LaTeX -u, a slike crtane u *WinGCLC*-u i *JavaView*-u. Zahvaljujemo se Tašani Šukilović na pomoći pri izradi određenog broja slika, kao i za dizajn korica. Pažljivom čitaocu ćemo biti zahvalni na svakoj uočenoj grešci koju ćemo rado ispraviti u sledećem izdanju.

Na kraju, koristimo priliku da se zahvalimo recenzentima, prof. dr Predragu Janičiću i dr Miroslavi Antić, kao i kolegi mr Đuri Mišljenoviću na pažljivom čitanju rukopisa i brojnim primedbama, sugestijama i diskusijama koje su ovu knjigu učinile boljom.

Beograd, decembar 2015. godine

Autori



Sadržaj

Predgovor

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Vektori i transformacije koordinata | 7 |
| 1.1 | Definicija vektora i osnovne osobine | 8 |
| 1.2 | Linearne operacije sa vektorima | 9 |
| 1.3 | Linearna nezavisnost vektora | 10 |
| 1.4 | Koordinate vektora i tačke | 12 |
| 1.5 | Centar mase i težište | 14 |
| 1.6 | Skalarni proizvod | 17 |
| 1.6.1 | Skalarni proizvod u ortonormiranoj bazi | 18 |
| 1.7 | Orijentacija u ravni i prostoru | 19 |
| 1.8 | Vektorski proizvod i mešoviti proizvod | 20 |
| 1.8.1 | Vektorski i mešoviti proizvod u koordinatama | 23 |
| 1.9 | Primena vektorskog i mešovitog proizvoda | 24 |
| 1.9.1 | Orijentacija trougla | 24 |
| 1.9.2 | Površina trougla i paralelograma | 25 |
| 1.9.3 | Kolinearnost tri tačke | 25 |
| 1.9.4 | Određivanje da li tačka pripada trouglu | 26 |
| 1.9.5 | Određivanje da li su tačke sa iste strane prave | 26 |
| 1.9.6 | Zapremina paralelepipeda i tetraedra | 27 |
| 1.10 | Transformacije koordinata vektora | 27 |
| 1.11 | Transformacije koordinata tačaka | 28 |
| 1.12 | Transformacija ortonormiranih repera ravni | 30 |
| 2 | Analitička geometrija ravni | 33 |
| 2.1 | Prava u ravni | 33 |
| 2.1.1 | Implicitna jednačina prave | 33 |
| 2.1.2 | Parametarska jednačina prave | 34 |
| 2.1.3 | Prelazak iz jednog oblika prave u drugi | 35 |
| 2.1.4 | Predstavljanje duži i poluprave | 35 |
| 2.1.5 | Parametrizacija trougla i paralelograma | 36 |
| 2.2 | Rastojanje tačke od prave | 36 |
| 2.3 | Preseci pravih, polupravih i duži | 37 |
| 2.3.1 | Presek pravih zadatih parametarski | 37 |
| 2.3.2 | Presek duži, polupravih i pravih | 38 |
| 2.3.3 | Presek pravih zadatih implicitno | 39 |
| 2.3.4 | Krug | 39 |
| 2.4 | Konusni preseci | 40 |
| 2.4.1 | Elipsa | 42 |
| 2.4.2 | Hiperbola | 43 |
| 2.4.3 | Parabola | 44 |
| 2.5 | Optičke osobine | 45 |
| 2.6 | Krive drugog reda | 48 |
| 2.6.1 | Svođenje krive drugog reda na kanonski oblik | 48 |
| 3 | Poligonska linija i poligon | 53 |
| 3.1 | Triangulacija poligona | 56 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2 | Površina prostog poligona | 57 |
| 3.3 | Konveksni omotač skupa n tačaka ravni | 59 |
| 3.3.1 | Algoritam vremenske složenosti $O(n^3)$ | 60 |
| 3.3.2 | Algoritam vremenske složenosti $O(nh)$ | 61 |
| 3.3.3 | Algoritam vremenske složenosti $O(n \log n)$ | 62 |
| 4 | Analitička geometrija u prostoru | 65 |
| 4.1 | Ravan u prostoru | 65 |
| 4.1.1 | Implicitna jednačina ravni | 65 |
| 4.1.2 | Parametarska jednačina ravni | 66 |
| 4.1.3 | Prelazak iz jednog oblika ravni na drugi | 67 |
| 4.1.4 | Izbor koordinatnog sistema u odnosu na datu ravan | 68 |
| 4.2 | Prava u prostoru | 69 |
| 4.2.1 | Parametarski oblik jednačine prave | 69 |
| 4.2.2 | Prava kao presek dve ravni | 70 |
| 4.3 | Rastojanja u prostoru | 72 |
| 4.4 | Međusobni položaji dve prave | 72 |
| 4.5 | Mimoilazne prave | 74 |
| 4.6 | Međusobni položaj prave i ravni | 77 |
| 4.6.1 | Prodor prave kroz trougao | 78 |
| 4.6.2 | Presek trougla i ravni | 79 |
| 4.6.3 | Presek dva trougla | 80 |
| 5 | Afina preslikavanja | 81 |
| 5.1 | Afina preslikavanja ravni | 83 |
| 5.2 | Predstavljanje afinih preslikavanja matricama | 85 |
| 5.3 | Neka značajna afina preslikavanja ravni | 87 |
| 5.3.1 | Translacija | 87 |
| 5.3.2 | Rotacija | 87 |
| 5.3.3 | Refleksija | 88 |
| 5.3.4 | Skaliranje | 89 |
| 5.3.5 | Smicanje | 91 |
| 5.4 | Afina preslikavanja prostora | 92 |
| 6 | Izometrije | 95 |
| 6.1 | Izometrije ravni | 95 |
| 6.2 | Izometrije prostora \mathbb{E}^n | 97 |
| 6.3 | Opis izometrija prostora | 99 |
| 6.3.1 | Rotacija oko prave | 99 |
| 6.3.2 | Refleksija u odnosu na ravan | 102 |
| 6.4 | Opis kretanja trodimenzionog prostora | 103 |
| 6.4.1 | Praktična primena Ojlerovih/Tejt-Brajanovih uglova | 106 |
| 6.4.2 | Veza sopstvenih i svetskih rotacija | 107 |
| 6.4.3 | Analitičko određivanje Tejt-Brajanovih uglova | 108 |
| 7 | Poliedarske površi | 109 |
| 7.1 | Tabela temena i povezanosti | 111 |
| 7.2 | Poliedarski model glatke površi | 113 |
| 7.2.1 | Orijentabilnost poliedarske površi | 115 |
| 7.2.2 | Značaj orijentabilnosti za računarsku grafiku | 120 |

| | | |
|----------------|--|------------|
| 7.3 | Ojlerova karakteristika površi | 121 |
| 7.4 | Platonova tela | 123 |
| 8 | Krive i površi | 127 |
| 8.1 | Krive u ravni | 127 |
| 8.2 | Krive u prostoru | 132 |
| 8.3 | Površni u prostoru | 133 |
| 8.4 | Bezijerove krive | 139 |
| 8.4.1 | Definicija Bezijerove krive | 140 |
| 8.4.2 | Osobine Bezijerovih krivih | 141 |
| 8.4.3 | De-Kasteljau algoritam | 143 |
| 8.4.4 | Podela Bezijerove krive | 145 |
| 8.4.5 | Povećanje stepena krive | 146 |
| 8.4.6 | Matrična reprezentacija kubne Bezijerove krive | 147 |
| 8.5 | Uopštenja Bezijerovih krivih | 149 |
| 8.5.1 | Bezijerove površi | 150 |
| 8.5.2 | Racionalne Bezijerove krive | 150 |
| 8.5.3 | Racionalne Bezijerove površi | 152 |
| 8.5.4 | B-splajn i NURBS krive i površi | 153 |
| Dodatak | | 155 |
| A | Centar mase | 156 |
| B | Homogene koordinate | 163 |
| B.1 | Homogene koordinate u ravni | 163 |
| B.2 | Projektivna i afina preslikavanja ravni | 165 |
| B.3 | Homogene koordinate i projektivna preslikavanja u prostoru | 169 |
| C | Baricentričke koordinate | 171 |
| D | Kosi hitac | 173 |
| E | Kretanje niz strmu ravan | 176 |
| F | Razni algoritmi u ravni | 180 |
| F.1 | O aritmetici u pokretnom zarezu | 180 |
| F.2 | Algoritmi za određivanje preseka pravih i duži | 181 |
| F.3 | Normala iz date tačke na datu pravu. Simetrala duži | 183 |
| F.4 | Simetrala ugla | 184 |
| F.5 | Paralela na datom rastojanju | 185 |
| F.6 | Podnožje normale iz tačke na pravu | 186 |
| F.7 | Presek prave i kruga | 187 |
| F.8 | Upisani i opisani krug trougla | 187 |
| F.9 | Tangenta iz date tačke na krug (krivu drugog reda) | 190 |
| F.10 | Zajedničke tangente dva kruga | 191 |
| G | Kvaternioni i izometrije prostora | 193 |
| H | Delonijeva triangulacija | 198 |
| I | Fraktali i beskonačno guste krive | 207 |
| J | Dokazi nekih teorema | 213 |
| | Srpsko-engleski rečnik terminologije | 217 |
| | Literatura | 223 |
| | Spisak slika | 224 |