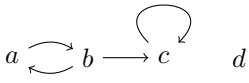
Uvod u matematičku logiku, primer prvog testa

1. Formulisati princip matematičke indukcije. Koristeći indukciju dokazati $7 \mid 2^{2n+1} + 5^{2n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
2. Neka je Σ skup svih konačnih nizova 0 i 1. Posmatrajmo sledeća pravila:
   (I) možemo da zapišemo prazan niz ϵ, niz 0 i niz 1;
   (II) ako smo zapisali σ, možemo da zapišemo $0\sigma0$;
   (III) ako smo zapisali σ, možemo da zapišemo $1\sigma1$.
   Ako smo zapisali niz σ, dokazati da je σ palindrom.
3. Definisati pojam tautologije. Ispitati da li su sledeće formule tautologije:
   a) $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$;
   b) $(a \wedge \neg b \to (c \to d)) \wedge c \wedge \neg d \to \neg a \vee b$.
4. Odrediti jednu KNF i jednu DNF formule $(p \to q) \leftrightarrow r$.
5. Napisati primer formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ čija je tablica:

p	q	r	φ
T	T	T	N
T	T	N	T
T	N	T	T
T	N	N	N
N	T	T	T
N	T	N	T
N	N	T	N
N	N	N	T

6. Definisati pojam logičke posledice. Ispitati da li važi:
   a) $p, p \vee q \to \neg s, r \to s \models \neg r$;
   b) $p, p \vee q \to \neg s, r \to s \models s \vee r$.
7. Definisati pojmove zadovoljivog i konačno zadovoljivog skupa formula. Formulisati teoremu kompaktnosti.
8. Na slici je dat binarni predikat p na skupu sa četiri elementa ($p(x, y)$ ako i samo ako postoji strelica $x \to y$):



   a) Zaokružiti tačne rečenice: $\exists x \forall y\, \neg p(x, y)$, $\forall x(p(x, x) \to \exists y\, p(y, x))$, $\forall x(\exists y\, p(y, x) \to \exists z\, p(x, z))$.
   b) Za koje x su tačne formule: $\forall y\, \neg p(y, x)$, $\forall y(p(x, y) \to p(y, x))$, $\forall y(p(y, x) \to p(x, y))$.
   c) Napisati formulu $\varphi(x)$ koja je tačna za $x = a$, $x = b$ i $x = c$, i netačna za $x = d$.
   Napisati formulu $\psi(x)$ koja je tačna za $x = b$, i netačna za $x = a$, $x = c$ i $x = d$.
9. U prirodnoj dedukciji dokazati:
   a) $p \to q, \neg r \to \neg q, s \to t \vdash (\neg p \to s) \to (\neg r \to t)$,
   b) $(p \to q) \vee (r \to q) \to (p \wedge r \to q)$.
10. Za koje cele brojeve x važi formula $x > 0 \to (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = 2y$.