DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, januar 2007

1. Neka je $\alpha : I \to R^3$ kriva data sa $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$ gde je f nepoznata funkcija.
a) Odrediti opšti oblik funkcije f tako da kriva bude ravanska.
b) Odrediti specijalan oblik funkcije f tako da kriva pripada ravni $Ax + By + Cz + D = 0$.
2. Ako sve normalne linije površi sadrže fiksiranu tačku tada je ta površ deo sfere. Dokazati.
3. Dat je konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in R^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
a) Odrediti prvu fundamentalnu formu površi koristeći polarne koordinate ravni (x, y).
b) Naći geodezijsku krivinu kruga na konusu koji se dobija kao presek ravni $z = a$ i konusa.
c) Odrediti jednačine krivih na konusu koje seku izvodnice pod konstantnim uglom α.
4. Neka je $f : u \to R^3$ regularna parametrizovana površ, $U = \{a < u < b, c < v < d\}$ koja ima metrički tenzor $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$. Pokazati da ako je srednja krivina $H = 0$ onda je f harmonijska funkcija, tj. $\triangle f = f_{uu} + f_{vv} = 0$.

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, jun 2013.

1. Neka su $x(t)$ i $y(t)$ glatke krive čije su normale $N_x(t)$ i $N_y(t)$ kolinearne. Ako je $y(t) = x(t) + \alpha(t)N_x(t)$ dokazati da je $\alpha = const$.
2. Naći jednačine krivih na jediničnoj sferi koje zaklapaju konstantan ugao α sa meridijanima sfere. Izračunati dužinu jedne od njih.
3. Paralele rotacione površi su geodezijske linije ako i samo ako su tangente u svakoj njihovoj tački na odgovarajuće meridijane paralelne osi rotacije površi. Dokazati.
4. U poluravanskom modelu geometrije Lobačevskog $L^2 = \{(u, v)|v > 0\}, ds^2 = \frac{du^2+dv^2}{v^2}$ date su geodezijske kao delovi krugova $a : x^2 + y^2 = 1, b : x^2 + y^2 = 7, c : (x - 2)^2 + y^2 = 3, d : (x + 2)^2 + y^2 = 3$. Dokazati da je pravama a, b, c, d odredjen Sakerijev četvorougao i izračunati mu ugao na protivosnovici.

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, oktobar 2009.

1. Neka je α regularno parametrizovana kriva za koju važi da je $\angle(T, u) = const$ za neki fiksirani vektor u. Ako su τ i κ torzija i krivina krive, $\kappa \neq 0$, dokazati $\tau = const \cdot \kappa$.
2. Naći jednačine krivih koje polove ugao izmedju koordinatnih linija površi $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, u > 0$.
3. Neka je $x = x(u, v)$ površ takva da za koeficijente prve fundamentalne forme važi $E = E(u), F = 0, G = G(u)$. Dokazati
a) u-parametarske krive $v = const$ su geodezijske.
b) v-parametarske krive $u = u_0$ su geodezijske ako i samo ako $G_u(u_0) = 0$.
c) krive oblika $\gamma(u) = x(u, v(u))$ je geodezijska ako i samo ako je $v = \pm \int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}du, C = const.$
4. Dat je poluravanski model geometrije Lobačevskog $L^2 = \{(u, v)|v > 0\}$ sa metrikom $ds^2 = \frac{du^2+dv^2}{v^2}$. Poznato je da geodezijske linije pripadaju krugovima sa centrima na u-osi i pravama ortogonalnim na u-osu. Odrediti jednačinu hiperboličkog kruga sa centrom u $S(0, a)$ i poluprečnikom r.