Основи геометрије (Геометрија 2) - 25. 2. 2026.

1. Нека је тачка H ортоцентар оштроуглог троугла ABC у еуклидској равни, а тачке D, E и F су подножја висина троугла ABC из темена A, B и C, редом.
а) [4 поена] Доказати да је $CB \cdot CD = CA \cdot CE = CF \cdot CH$.
б) [8 поена] Нека је тачка X пресечна тачка правих AH и EF, а Y пресечна тачка кружница описаних око троуглова ACH и BCE, при чему је $Y \neq C$. Применом неке инверзије са центром у тачки C доказати да су тачке C, X и Y колинеарне.
в) [3 поена] Одредити радикалну осу кругова описаних око троуглова ACH и BEF и упоредити потенције тачке X у односу на та два круга.

2. [15 поена] Конструисати троугао ABC еуклидске равни ако је познато да су дате дужи h_a, l_a и t_a подударне висини из темена A, одсечку бисектрисе унутрашњег угла $\angle BAC$ и тежишној дужи из темена A, редом.

3. [15 поена] Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ правилан осмоугао у еуклидској равни. Одредити тип и компоненте изометрије равни $S_{A_2A_6} \circ S_{A_1A_5} \circ S_{A_4A_8} \circ S_{A_3A_7} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{A_3A_5}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{A_7A_5}}$. Одредити фиксне тачке те изометрије, као и њен инверз.

4. а) [10 поена] Нека су AB и CD различите праве у хиперболичкој равни такве да су тачке A и C са исте стране праве BD. Ако је $\angle ABD + \angle BDC = 2R$, доказати да су праве AB и CD хиперпаралелне.
б) [5 поена] Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у хиперболичкој равни. Упоредити збир спољашњих углова код темена A и B четвороугла $ABCD$ са збиром његових унутрашњих углова код темена C и D. Да ли четвороугао $ABCD$ има бар један туп спољашњи угао? Да ли бар један унутрашњи угао четвороугла $ABCD$ мора бити туп?

Решења свих задатака прецизно и детаљно образложити. Срећно!

Основи геометрије - ЈАНУАР 2, 14.3.2026.

1. Дат је троугао $\triangle ABC$ такав да је $\angle A_1AC = \angle CBA$, где је A_1 средиште странице BC. Нека су B_1 и C_1 редом средишта страница CA и AB. Нека је ψ_k инверзија у односу на круг $k(A, C_1)$.
   а) Доказати да је $AA_1^2 = 2AC_1^2$.
   б) Наћи слику тачке A_1 и одредити слике правих A_1C_1 и B_1C_1 при инверзији ψ_k.
   в) Нека је O центар описаног круга око троугла $\triangle ABC$. Одредити угао који образују праве AO и $\psi_k(B)\psi_k(C)$.
2. Конструисати троугао $\triangle ABC$ еуклидске равни, ако је дат угао β и дужи d и ρ_b, који редом одговарају углу $\angle CBA$, разлици дужина страница AB и BC и полупречинку споља уписаног круга који додирује страницу AC.
3. а) Показати да за две различите тачке A и B важи $S_B \circ S_A = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$.
   б) Дат је трапез $ABCD$ основице AB и тачке E и F које су подножја нормала редом из тачака C и D на основицу AB. Одредити тип и компоненте изометрије $S_E \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{DC}} \circ S_C \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{AB} \circ S_{FD}$.
4. Дата су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $CBEF$ са основицама редом AB и CB и нека је $AB = BC = BE$. Доказати да су ова два четвороугла подударна. Нека су M и N редом средишта противосновица DC и EF, а O пресек нормале из тачке M на основицу AB са нормалом из тачке N на основицу CB. Испитати да ли O припада дијагонали BD? Упоредити дужине AS и $\frac{1}{2}BF$ где је S средиште дијагонале BD.

Решења свих задатака прецизно и детаљно образложити. Срећно!

Основи геометрије (Геометрија 2) - 2. 7. 2026.

1. Нека је ABC троугао у еуклидској равни, а тачке D, E и F су такве да важе распореди тачака $\mathcal{B}(B,D,C)$, $\mathcal{B}(A,E,C)$, $\mathcal{B}(A,F,B)$ и да се кругови описани око троуглова AEF и BDF секу у тачки S која је у унутрашњости троугла ABC.

а) [11 поена] Применом инверзије са центром у тачки S доказати да се кругови описани око троуглова AEF, BDF и CDE секу у једној тачки.
б) [4 поена] Ако су O_A, O_B и O_C центри кругова описаних око троуглова AEF, BDF и CED, редом, доказати да су троуглови $O_AO_BO_C$ и ABC слични.

2. [15 поена] Конструисати троугао ABC еуклидске равни ако је познато да су дате три различите тачке A_1, S и E средиште странице BC, центар уписаног круга и тачка у којој симетрала унутрашњег угла $\angle ABC$ троугла ABC сече страницу BC, редом. редом.

3. [15 поена] Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез у еуклидској равни. Одредити тип и компоненте изометрије равни $\mathcal{R}_{C,2\angle DCA} \circ \mathcal{R}_{D,2\angle ADC} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CB}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{AB}$. Одредити фиксне тачке те изометрије, као и њен инверз.

4. а) [4 поена] Доказати да су углови на противосновици Сакеријевог четвороугла у хиперболичкој равни међусобно подударни и оштри.
б) [11 поена] У хиперболичкој равни дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C. Ако су B_1 и C_1 средишта страница AC и AB, доказати да права B_1C_1 није нормална на праву AB.

Решења свих задатака прецизно и детаљно образложити. Срећно!

Основи геометрије (Геометрија 2) - 2. 7. 2026.

1. Нека је ABC троугао у еуклидској равни, а тачке D, E и F су такве да важе распореди тачака $\mathcal{B}(B,D,C)$, $\mathcal{B}(A,E,C)$, $\mathcal{B}(A,F,B)$ и да се кругови описани око троуглова AEF и BDF секу у тачки S која је у унутрашњости троугла ABC.

а) [11 поена] Применом инверзије са центром у тачки S доказати да се кругови описани око троуглова AEF, BDF и CDE секу у једној тачки.
б) [4 поена] Ако су O_A, O_B и O_C центри кругова описаних око троуглова AEF, BDF и CED, редом, доказати да су троуглови $O_AO_BO_C$ и ABC слични.

2. [15 поена] Конструисати троугао ABC еуклидске равни ако је познато да су дате три различите тачке A_1, S и E средиште странице BC, центар уписаног круга и тачка у којој симетрала унутрашњег угла $\angle ABC$ троугла ABC сече страницу BC, редом. редом.

3. [15 поена] Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез у еуклидској равни. Одредити тип и компоненте изометрије равни $\mathcal{R}_{C,2\angle DCA} \circ \mathcal{R}_{D,2\angle ADC} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CB}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{AB}$. Одредити фиксне тачке те изометрије, као и њен инверз.

4. а) [4 поена] Доказати да су углови на противосновици Сакеријевог четвороугла у хиперболичкој равни међусобно подударни и оштри.
б) [11 поена] У хиперболичкој равни дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C. Ако су B_1 и C_1 средишта страница AC и AB, доказати да права B_1C_1 није нормална на праву AB.

Решења свих задатака прецизно и детаљно образложити. Срећно!

Основи геометрије (Геометрија 2) - 6. 9. 2026.

1. а) [7 поена] Нека су P, Q и R тачке у којима круг уписан у троугао ABC у еуклидској равни додирује његове странице BC, AC, AB, редом, а Q' и R' су тачке полуправих PQ и PR, редом, такве да је $PQ \cdot PQ' = PR \cdot PR'$. Доказати да је $CP = p - AB$, где је p полуобим троугла ABC и да је $\angle PQ'R' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$. Какав је међусобни положај правих BC и $Q'R'$?
б) [8 поена] Доказати да за произвољну инверзију ψ_h са центром P и произвољан круг k који садржи тачку P важи да је $\psi_h(k \setminus \{P\})$ права паралелна тангенти t круга k у тачки P. Затим, применом погодно одабране инверзије закључити какав је међусобни положај правих BC и $Q'R'$ из дела а).

2. [15 поена] Конструисати троугао ABC еуклидске равни ако су дате дужи p и h_a подударне полуобиму троугла ABC и висини троугла ABC из темена A, редом, а дати угао α је подударан унутрашњем углу BAC тог троугла.

3. [15 поена] Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ правилни деветоугао у еуклидској равни. Одредити тип и компоненте изометрије равни $\tau_{\overrightarrow{A_6A_3}} \circ S_{A_6} \circ S_{A_3} \circ S_{A_3A_6} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{A_9A_3}} \circ S_{A_6A_9} \circ \tau_{\overrightarrow{A_6A_9}} \circ S_{A_5A_6}$. Одредити фиксне тачке те изометрије, као и њен инверз.

4. а) [5 поена] Ако је дужина висине еквидистанте e већа од нуле, доказати да еквидистанта e није права.
б) [10 поена] Нека су e и e' две еквидистанте које имају висине исте дужине и налазе се са разних страна њихове заједничке основице s. Ако је A произвољна тачка која припада еквидистанти e и B произвољна тачка која припада еквидистанти e', доказати да средиште дужи AB припада основици s.

Решења свих задатака прецизно и детаљно образложити. Срећно!

Основи геометрије (Геометрија 2) - 23. 9. 2026.

1. а) [10 поена] Нека су P, Q и R три неколинеарне тачке у еуклидској равни и ψ_k инверзија у односу на круг k са центром P који не садржи тачке Q и R. Ако је $Q' = \psi_k(Q)$ и $R' = \psi_k(R)$ доказати да тачке Q, R, R' и Q' припадају једном кругу који је ортогоналан на круг k.
б) [5 поена] Нека је ABC троугао у еуклидској равни са тупим углом код темена A. Ако су тачке P и Q подножја висина троугла ABC из темена B и C, редом, а k круг са центром у ортоцентру H троугла ABC и полупречником $\sqrt{HB \cdot HP}$, доказати да тачке B, C, P и Q припадају кругу који је ортогоналан на круг k.

2. [15 поена] Конструисати троугао ABC еуклидске равни ако су дате дужи a, $b - c$ и h_c подударне страници BC, разлици страница AC и AB и висини троугла ABC из темена C, редом.

3. [15 поена] Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ правилан шестоугао у еуклидској равни. Ако је O његов центар описаног круга, а p, q и r симетрале страница A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4, одредити тип и компоненте изометрије равни $S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \tau_{\overrightarrow{A_1A_4}} \circ S_{A_2A_3}$. Одредити фиксне тачке те изометрије, као и њен инверз.

4. Нека је $ABCD$ Сакеријев четвороугао са основицом AB у хиперболичкој равни. На дужима AD и BC изабране су тачке E и F, редом, тако да је $AE = BF$.
а) [5 поена] Доказати да су углови $\angle FED$ и $\angle CFE$ међусобно једнаки и тупи.
б) [10 поена] Доказати да је $EF < CD$, као и да се праве EF и CD не секу.

Решења свих задатака прецизно и детаљно образложити. Срећно!