Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 1, 2014/2015.

1. Koristeći stereografsku projekciju $S^2\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^2$ i identifikujući $\mathbb{R}^2$ sa kompleksnom ravni $\mathbb{C}$, možemo identifikovati S^2 sa $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, gde je ∞ tačka u beskonačnosti. Mebijusova transformacija je preslikavanje $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dato sa $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, gde su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takvi da je $ad - bc \neq 0$, dok za ∞ važi $\dfrac{\alpha}{\infty} = 0$, $\dfrac{\alpha}{0} = \infty$ za $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pokazati da je ovako definisana Mebijusova transformacija $f : S^2 \to S^2$ difeomorfizam.

2. Pokazati da su $S^1 \times S^1$ i $F(\theta, \phi) = \{(cos\phi(b + acos\theta), \sin\phi(b + acos\theta), \sin\theta)|\theta, \phi \in \mathbb{R}\}, b > a$ difeomorfne mnogostrukosti koje obe nazivamo torusom.

3. Neka je dat torus iz prethodnog zadatka. U svakoj njegovoj tački posmatramo jedinični vektor normalan na torus, u standardnoj metrici prostora $\mathbb{R}^3$. Ovim je definisano preslikavanje $f : T^2 \to S^2$. Dokazati da je f glatko preslikavanje.

4. Za krivu $\gamma : [0, 1] \to M$ na mnogostrukosti M za koju je $\gamma(0) = \gamma(1)$ kažemo da je zatvorena. Zatvorena kriva γ na mnogostrukosti "čuva" orijentaciju, ako postoji niz karata mnogostrukosti M, $(U_i, \phi_i), 1 \leq i \leq k$, koje pokrivaju skup $\gamma([0, 1])$, takvih da je $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset, det(d(\phi \circ \phi_{i+1}^{-1})) > 0, (k + 1 \approx 1)$ i $\gamma(0) = \gamma(1) \in U_1, U_k$. Pokazati:
   1) Ako je M povezana mnogostrukost onda je M orijentabilna ako i samo ako svaka zatvorena kriva na M "čuva" orijentaciju.
   2) Ako je p data tačka povezane mnogostrukosti M, onda je M orijentabilna ako i samo ako svaka zatvorena kriva kroz p "čuva" orijentaciju.

5. Neka je $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ prostor n-dimenzionih realnih matrica. Vektorsko polje V_a na $\mathcal{M}$ definisano je sa $V_a(x) = ax - xa, \;\; a, x \in \mathcal{M}$. Izrachunati $[V_a, V_b]$.

6. Naći na sferi S^2 kovektorsko polje koje je nula u tačno jednoj tački.

7. Dokazati da ne postoji sečenje linijskog raslijenja nad $\mathbb{R}P^n$ koje bar u jednoj tački nije 0.

Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 2, 2014/2015

1. Neka su A i B podmnogostrukosti, redom, mnogostrukosti M i N. Pokazati da je $A \times B$ podmnogostrukost od $M \times N$.

2. Pokazati da je prirodno projektovanje $\pi : TM \to M$, dato sa $\pi(X_p) = p$ submerzija.

3. Neka je $f : \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}^l$ diferencijabilno preslikavanje ranga l i $f_i = x_i \circ f, i = 1, \dots, l$ funkcije koordinata slike. Neka je $0 \in f(\mathbb{R}^{n+l})$.
   a) Pokazati da su vektori $(\partial_{x_1} f_i, \dots, \partial_{x_{n+l}} f_i)(p), i = 1, \dots, l$, ortogonalni na $Ker\ df_p$, za $p \in \mathbb{R}^{n+l}$, u odnosu na standardni skalarni proizvod prostora $\mathbb{R}^{n+l}$ i medjusobno linearno nezavisni.
   b) Pokazati da je $f^{-1}(0)$ orijentabilna, n-dimenziona podmnogostrukost od $\mathbb{R}^{n+l}$, (videti i po potrebi koristiti Zadatak 2.7 u skriptama).

4. Pokazati da je produkt $M = S^p(\sqrt{p/n}) \times S^{n-p}(\sqrt{(n-p)/n})$ podmnogostrukost sfere $S^{n+1} \subset R^{n+2}$. Ovaj produkt nazivamo Klifordov torus. Pokazati da tačka $N(0, \dots, 0, 1) \in S^{n+1} \backslash M \neq \emptyset$, a zatim koristeći stereografsku projekciju naći ulaganje M u R^{n+1}.

5. U $\mathbb{R}^3$ data su vektorska polja $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ i $Y = 2zx\frac{\partial}{\partial x} + 2zy\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - x^2 - y^2 + 1)\frac{\partial}{\partial z}$. Odrediti oblast u $\mathbb{R}^3$ u kojoj je $\mathcal{L}(X, Y)$ dvodimenziona distribucija, pokazati da je involutivna i naći slike integralnih mnogostrukosti.

Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 3, 2014-2015.

1. Dokazati II Bjankijev identitet.

2. Neka je ∇ standardna koneksija prostora $\mathbb{R}^3$ i $\times$ vektorski proizvod. Pokazati da sa $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + Y \times X$ data jedna koneksija na $\mathbb{R}^3$. Data je kriva $\gamma(t) = (0,0,t), t \in \mathbb{R}$, i vektor $V_{(0,0,0)} = (1,0,0)$. Naći sliku ovog vektora pri paralelnom pomeranju duž krive γ do tačke $\gamma(t_0)$.

3. Neka je ∇^s standardna koneksija na $M = S^2 \setminus \{N, S\}$ i V vektorsko polje na M, a $\circ$ standardni skalarni proizvod u $\mathbb{R}^3$.
a) Pokazati da je sa $\overline{\nabla}_X Y = \nabla^s_X Y + (X \circ Y)V - (V \circ Y)X$ data nesimetrična, metrička koneksija na M.
b) Za $V = -\tan\theta \frac{\partial}{\partial\theta}$ izračunati Kristofelove simbole ove koneksije, pokazati da je koneksija ravna ($R = 0$) i naći geodezijske linije.

4. a) Pokazati da je za $\phi(u,v) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u\right)$ sa $(\phi(\mathbb{R}^2), \phi^{-1})$ data jedna karta sfere S^2. Preslikavanje ϕ naziva se Merkatorova projekcija. Šta su slike krivih $v = const$ i $u = const$? Pokazati da je prelikavanje ϕ konformno.

   b) Odrediti krive na sferi S^2 koje u svakoj svojoj tački zaklapaju isti ugao sa odgovarajućim meridijanom (loksodrome). Šta je slika loksodroma u Merkatorovoj projekciji?

5. Ravnu krivu takvu da je odsečak tangente u njenoj proizvoljnoj taǩi do zadate prave konstantne dužine nazivamo traktrisa. Neka je data dužina $a = 1$, koordinatni sistem u ravni takav da je zadata prava x-osa i neka je traktrisa parametrizovana sa $(f(u), g(u))$.
a) Pokazati da važi $\sqrt{f'^2 + g'^2} = -\frac{g'}{g}$.
b) Neka je $f(u) > 0$. Pokazati da je $f(u) = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) - \frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$, $g(u) = \frac{1}{u}$ jedna parametrizacija traktrise.
c) Rotacijom traktrise oko asimptote, odnosno date krive ($f(u) > 0$) oko x-ose dobija se rotaciona površ pseudosfera. Pokazati da je pseudosfera lokalno izometrična hiperboličkoj poluravni.

6. Vektorsko polje X mnogostrukosti M je Kilingovo ako važi $g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$ za sve $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Naći sva Kilingova polja sfere S^2 u metrici $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2$.