1. Аксиоме инциденције

Прва група аксиома су аксиоме **инциденције**, односно **припадања**, има их 9:

I1: Свака права садржи најмање две тачке.

I2: Постоји најмање једна права која садржи две (дате) тачке.

I3: Постоји највише једна права која садржи две (дате) разне тачке.

I4: Свака раван садржи бар једну тројку неколинеарних тачака.

I5: Постоји најмање једна раван која садржи три (дате) тачке.

I6: Постоји највише једна раван која садржи три (дате) неколинеарне тачке.

I7: Ако две разне тачке једне праве припадају датој равни, онда све тачке те праве припадају тој равни.

I8: Ако две разне равни имају бар једну заједничку тачку, онда оне имају бар још једну заједничку тачку.

I9: Постоје четири некомпланарне тачке.

С обзиром да су наши основни појмови тачке и скупови тачака, водимо рачуна о скуповној нотацији.
Исправно је $A \in p, \{A\} \subset p,\ p \subset \alpha,\ A \in \alpha.$
Није исправно: $A \subset p,\ A \subset \alpha,\ p \in \alpha.$
I8: $\exists A, A \in \alpha, A \in \beta \Rightarrow \exists B \neq A, B \in \alpha, B \in \beta.$
Погрешно је: $\exists A, \{A\} = \alpha \cap \beta \Rightarrow \exists B \neq A, \{B\} = \alpha \cap \beta.$

Теорема (1.6)

Постоји јединствена права која садржи две разне тачке.

Доказ. Нека су A и B две разне тачке. На основу $I2$ постоји бар једна права која их садржи. На основу $I3$ не може их бити више од једне такве праве, те је таква права јединствена. □

С обзиром да две разне тачке одређују једну праву, када кажемо да се праве секу, подразумевамо да је пресек једночлан.

Слично доказујемо и

Теорема (1.7)

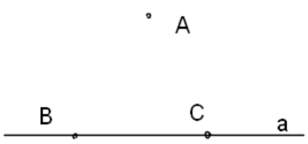
Постоји тачно једна раван која садржи три (дате) неколинеарне тачке. **БД**

Лако се показује:
1. Ако су три тачке неколинеарне, онда су сваке две од њих различите;
2. Ако су четири тачке некомпланарне тада су сваке две од њих међусобно различите, а сваке три од њих неколинеарне.

Теорема (1.8)

Постоји јединствена раван која садржи праву и тачку која јој не припада.

Доказ.



Нека $A \notin a$. На основу $I1$ постоје бар две разне тачке $B, C \in a$. Тачке A, B, C су неколинеарне: с обзиром да су B и C различите, права a је јединствена која садржи две дате тачке; да су A, B, C колинарне онда би и $A \in a$, а то није случај. С обзиром да су A, B, C неколинарне постоји јединствена раван α која их садржи.

Да ли та раван садржи и праву a?

С обзиром да $B, C \in \alpha$ и $B, C \in a$, на основу $I7$ следи $a \subset \alpha$. Дакле, α садржи A и a.

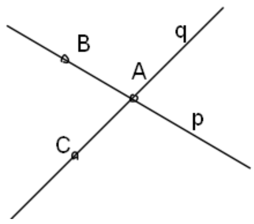
Треба још показати да је α једина раван која садржи a и A.

Нека је β раван таква да је $A \in \beta, a \subset \beta$. Тада све тачке праве a припадају β па и $B, C \in \beta$. С обзиром да $A, B, C \in \beta$, $A, B, C \in \alpha$, на основу $T1.7$ следи $\alpha = \beta$. $\square$

Теорема (1.9)

Постоји јединствена раван која садржи две разне праве које се секу.

Доказ.



Нека је $\{A\} = p \cap q$. Тада постоје тачке $B \in p, B \neq A$ и $C \in q, C \neq A$ на основу $I1$. Тачке A, B, C су неколинеарне јер би се иначе праве p (одређена са A и B) и q (одређена са A и C) поклапале. Постоји јединствена раван α т.д. $A, B, C \in \alpha$.

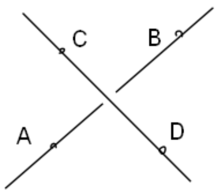
С обзиром да два разне тачке A и B праве p припадају α, на основу $I7$ следи $p \subset \alpha$. Слично, $q \subset \alpha$.

Нека је β раван т.д. $p, q \subset \beta$. Тада је и $A, B, C \in \beta$ јер су то тачке правих p или q. α је јединствена раван која садржи A, B, C па је $\alpha = \beta$. Зато је и раван која садржи p и q јединствена. □

Теорема

Постоје бар две мимоилазне праве.

Доказ. $I9$ имплицира да постоји бар једна четворка некомпланарних тачака A, B, C, D.



Нека су p и q праве које редом садрже A и B, односно C и D. Претпоставимо да ове праве нису мимоилазне. Тада би постојала раван α која би их садржала, односно садржала би све њихове тачке.

Зато би и $A, B, C, D \in \alpha$, што је контрадикција. ↯ □

Теорема (1.13)

Ако две разне равни имају заједничку бар једну тачку, тада је њихов пресек права.

Доказ. Нека $\alpha \neq \beta$. и нека је $A \in \alpha \cap \beta$. На основу $I8$ следи да постоји B, $B \neq A$, $B \in \alpha \cap \beta$. Постоји и јединствена права p т.д. $A, B \in p$.

Покажимо да је p пресек равни α и β. Прво, две разне тачке A, B праве p припадају α, па је $p \subset \alpha$. Слично је и $p \subset \beta$. Дакле $p \subset \alpha \cap \beta$.

Да ли постоји још нека тачка која припада пресеку равни, а не припада правој p?

Претпоставимо да је $X \in \alpha \cap \beta$ и $X \notin p$.

Тада постоји јединствена раван која садржи X и p, а то важи и за α и за β. Дакле, $\alpha = \beta$. ↯ □

Пример: Посматрајмо следећи скуп објеката:
$S = \{A, B, C, D\}$,
$L = \big\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\big\}$,
$P = \big\{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}\big\}$.
Сматрајмо да су A, B, C, D тачке, односно да је S простор, а L и P, скупови правих, односно равни.
Директном провером (проверити!) уочавамо да овако одабрани основни појмови задовољавају аксиоме инциденције, па представљају један модел тих аксиома.
С обзиром да овај модел има тачно четири тачке, не може се, на основу аксиома инциденције, доказати постојање већег броја тачака од 4.