Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Симплектички капацитети

Студент: Филип Живановић

Ментор: др Дарко Милинковић

У Београду, 2015-2016.

Садржај

Предговор

Громовљев рад из 1985. ([27]) представља прекретницу у области математике која се данас назива симплектичка топологија. У овом раду Громов је изложио теорију холоморфних кривих примењену у симплектичком амбијенту, што се испоставило као револуционарна идеја. Једна од последица теорије изложене у овом раду је Громовљева *non-squeezing* теорема која каже да се лопта симплектички може уложити у цилиндар ако и само ако је њен полупречник мањи од полупречника цилиндра. Овакав тип ригидности се први пут појављује у симплектичкој геометрији која је до тада била више сматрана за флексибилну. Појам капацитета, може се рећи, настаје управо овим радом, иако су га први дефинисали Хофер и Екеланд у раду [21] неколико година касније. Капацитет представља инваријанту у симплектичкој геометрији која има циљ да опише величину скупа, аналогно дијаметру у Римановој геометрији односно запремини у геометрији пресликавања која чувају запремину. У класичној механици, која је била основ и мотивација у стварању симплектичке геометрије, одавно је познато да симплектичка пресликавања чувају запремину фазног простора (Лиувилова теорема). Ово нам говори да је запремина једна симплектичка инваријанта. Са друге стране, споменута Громовљева теорема нам сугерише да запремина тела ипак није довољна. То је уједно и један од мотива за проучавање симплектичких капацитета, који представљају суптилније симплектичке инваријанте од запремине.

У првој глави је направљен преглед класичних дефиниција и тврђења симплектичке топологије неопходних за праћење остатка материјала.

У другој глави се бавимо функционалом дејства, централним објектом симплектичке топологије, који као и сама ова област, потиче из Хамилтонове механике. У овој глави доказујемо егзистенцију Хамилтонове орбите за специјалне Хамилтонијане, која ће нам бити од суштинске важности у доказивању Хофер-Цендеровог капацитета.

У трећој глави је изложена уводна прича о симплектичким капацитетима и мотивација за њихово проучавање, као и основна својства капацитета.

У четвртој глави је дат преглед основних примера капацитета пронађених до датума писања овог рада.

У петој глави се бавимо детаљније Хофер-Цендеровим капацитетом, који се данас често сматра синонимом за симплектички капацитет. Његова дефиниција користи Хамилтонову динамику, која је присутна на свакој симплектичкој многострукости, сходно томе веома је интуитивна и зато се овај капацитет најчешће користи. У овој глави, користећи теорију развијену у другој глави, најпре доказујемо да је ова величина заиста капацитет, што се испоставља као засебан доказ поменуте *non-squeezing* теореме, а потом наводимо примене овог капацитета на егистенције периодичних Хамилтонових орбита, као и нове резултате везане за његову коначност у котангентним раслојењима.

Желим да се захвалим свом ментору, професору Дарку Милинковићу, најпре на предлогу тезе, те на посвећеном времену, сарадњи и сугестијама које ми је давао током израде овог рада. Поред тога, он ме је својим знањем, искуством и ентузијазмом умногоме заинтересовао за област симплектичке топологије. Такође се захваљујем и члановима комисије, др Јелени Катић и академику професору Миодрагу Матељевићу, на корисним сугестијама приликом читања овог рада.

На крају, највећу захвалност дугујем својим родитељима како на подршци у одабиру професије тако и на свему осталом што су ми пружили у животу.

1 Увод у симплектичку топологију

Симплектичка геометрија се бави глатким многострукостима са додатном, симплектичком структуром која је задата антисиметричном недегенерисаном 2-формом. Као таква она је пандан Римановој геометрији, у којој је додатна структура дата симетричном (позитивно дефинитном) формом. Међутим, ове две геометрије се драстично разликују, док је Риманова пуна локалних инваријанти, симплектичка геометрија се одликује глобалним инваријантама, док локалних нема, и зато је све чешће у употреби термин *симплектичка топологија* за ову област. У овом поглављу наводимо основна тврђења и дефиниције симплектичке топологије.

1.1 Симплектичке многострукости. Скоро комплексне структуре

Дефиниција 1.1. *Симплектички векторски простор* (V, ω) је коначно димензионални реални векторски простор V снабдевен билинеарном формом ω која је антисиметрична и недегерисана, тј. важи

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u), \quad u, v \in V$$

и за свако u из V постоји v тако да је $\omega(u, v) \neq 0$.

Нека је сада M глатка многострукост (У даљем тексту, ако се не нагласи другачије сматрамо да су све многострукости и објекти на њима глатки). Симплектичка форма на њој је уопштење претходне дефиниције.

Дефиниција 1.2. Недегенерисана, затворена, диференцијална 2-форма ω на M се назива *симплектичком формом* на M. Многострукост M са симплектичком формом ω се назива *симплектичком многострукошћу* (M, ω).

Приметимо да је тангентни простор на оваквој многострукости симплектички. Постојање антисиметричне недегенерисане 2-форме на векторском простору је могуће само ако је тај простор парне димензије (ово је ствар линеарне алгебре и лако се доказује), те самим тим важи

Став 1.1. Сваки симплектички векторски простор, а самим тим и свака симплектичка многострукост је парне димензије. ■

Пример 1.1. Стандардни пример симплектичке многострукости је векторски простор $\mathbb{R}^{2n}$ заједно са формом ω_0 задатом са

$$\omega_0(u,v) = \langle Ju, v\rangle, \quad u,v \in \mathbb{R}^{2n}$$

где је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^{2n}$, а $2n \times 2n$ матрица J дефинисана са

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix},$$

при чему је E_n јединична матрица димензије $n \times n$. Како је $det \neq 0$ и $J^T = -J$ форма ω_0 је недегенерисана и антисиметрична, дакле симплектичка.

У овом примеру такође закључујемо да важи $J^2 = -E$, као и $\omega_0(u, Jv) = \langle u, v\rangle$. Имајући ово у виду наведимо још једну дефиницију:

Дефиниција 1.3. Комплексна структура на векторском простору V је линеарни аутоморфизам J на њему такав да важи $J^2 = -E$.

Видимо да и комплексна структура захтева парну димензију векторског простора на коме је задата. Штавише, она га чини комплексним векторским простором, дефинишући множење скаларом са

$$(\alpha + i\beta)v = \alpha v + \beta Jv, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in V$$

.

У примеру горе, комплексна структура J на $\mathbb{R}^{2n}$ даје управо множење са i које постоји у $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Ова дефиниција се природно уопштава на многострукости:

Дефиниција 1.4. *Скоро комплексна структура* на многострукости је глатка фамилија комплексних стуктура на њеним тангентним просторима. Оваква многострукост се назива *скоро комплексном.*

Дефиниција 1.5. Кажемо да је скоро комплексна структура J на симплектичкој многострукости (M, ω) *сагласна* са симплектичком формом ω ако је $\omega(\cdot, J\cdot)$ Риманова метрика на M.

Из претходног закључујемо да су ω_0 и J сагласне на $\mathbb{R}^{2n}$. Ово је само један пример општије теореме:

Теорема 1.1. Свака симплектичка многострукост (M, ω) поседује скоро комплексну структуру J која је сагласна са њеном формом. Штавише, скуп таквих скоро комплексних структура је контрактибилна бесконачнодимензиона многострукост.

Доказ. Погледати [37] ∎

Као што смо пре напоменули, симплектичка топологија нема локалне инваријанте. Другим речима, сваке две симплектичке многострукости исте димензије су локално изоморфне, па самим тим изоморфне отвореном подскупу стандардне симплектичке многострукости $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Дефинишимо најпре изоморфизам у овој категорији.

Дефиниција 1.6. Нека су (M, ω) и (N, Ω) симплектичке многострукости. Дифеоморфизам $\phi : M \to N$ се назива *симплектоморфизмом* ако чува симплектичку форму, тј. $\phi^*\Omega = \omega$. Ако је ϕ улагање, онда се оно назива *симплектичким улагањем* ако чува симплектичку форму.

Формулишимо сада теорему која оправдава претходно написано:

Теорема 1.2. (Дарбу) Нека је (M, ω) симплектичка многострукост димензије $2n$. Тада око произвољне тачке $p \in M$ постоји околина U и карта $\phi : (U, \omega) \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ која је симплектоморфизам на слику.

Доказ. Погледати [3],[33]. ∎

Локалне координате које добијамо из претходне теореме се називају *Дарбуовим координатама.* У овим координатама симплектичка форма ω се записује са $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$, јер је то запис форме ω_0, када су $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ координате на $\mathbb{R}^{2n}$.

Докажимо сада специјалан случај претходне теореме која је симплектички аналогон Грам-Шмитовог поступка:

Дефиниција 1.7. Нека је V симплектички векторски простор, и W његов потпростор. *Симплектички ортогонал* од W је потпростор

$$W^{\perp_\omega} = \{v \in V \mid \omega(v, u) = 0, \text{ за све } u \in W\}.$$

Лема 1.1. (Дарбуова база) Нека је V симплектички векторски простор, димензије $2n$, са формом ω. Тада постоји база $(x_1, x_2, .., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ таква да је ω дефинисана са:

$$\omega(x_i, y_j) = -\omega(y_j, x_i) = \delta_{ij}$$

$$\omega(x_i, x_j) = \omega(y_i, y_j) = 0,$$

где је δ_{ij} Кронекеров симбол.

Доказ. Тврђење се доказује индукцијом. Нека је v произвољан не-нула вектор из V. Тада постоји вектор u такав да је $\omega(v, u) \neq 0$ јер је форма ω недегенерисана. Скалирањем вектора u може се постићи да је $\omega(v, u) = 1$. Тада је простор

$$W = \langle v, u \rangle$$

симплектички потпростор, и важи $V = W \oplus W^{\perp_\omega}$. Заиста, ако би постојао вектор $z \in W \cap W^{\perp_\omega}$, тада би постојали α и β такви да је $z = \alpha v + \beta u$, и притом би важило

$$\omega(z, v) = \omega(z, u) = 0,$$

што уз антисиметричност форме ω и услов $\omega(v, u) \neq 0$ даје $\alpha = \beta = 0$. Дакле сума $W + W^{\perp}$ је директна. Са друге стране, важи (и није тешко доказати) као у случају скаларног производа, да је

$$dimW + dimW^{\perp_\omega} = 2n, \tag{1.1}$$

за сваки потпростор W. Самим тим претходна директна сума разапиње цео простор. Тиме имамо да је и $W^{\perp}$ симплектички векторски простор, са рестрикцијом ω на њему, и можемо применити индуктивни корак на њега. Тиме добијамо базу $(x_1, x_2, .., x_{n-1}, y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ за коју важи услов тврђења, којој додамо векторе $x_n = v$ и $y_n = u$, и тиме добијамо тражену базу. ■

Базу симплектичког векторског простора конструисану у претходној леми, аналогно координатама из теореме 1.2, зовемо *Дарбуовом базом.*

Став 1.2. Нека је M многострукост. Тада ја 2-форма ω на M недегенерисана акко је $\omega^{\wedge n} \neq 0$.

Доказ. Како су оба својства из тврђења дефинисана на тангентном простору у тачки, сводимо тврђење на векторски простор са 2-формом (V, ω). Нека је ω недегенерисана. Тада је она симплектичка, па постоји Дарбуова база, у којој се форма ω записује са $\omega = dx_1 \wedge dy_i + \cdots + dx_n \wedge dy_n$, што даје $\omega^{\wedge n} = n!(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n) \neq 0$. Супротно, ако је форма ω дегенерисана, онда постоји вектор X такав да је $\omega(X, \cdot) = 0$. Допунимо овај вектор произвољно до базе $(X, Y_1, \ldots, Y_{2n-1})$. Важи $\omega^{\wedge n}(X, Y_1, \ldots, Y_{2n-1}) = 0$, јер се при рачунању $\omega^{\wedge n}$ свуда појављују сабирци са чиниоцима $\omega(X, Y_i)$ који су једнаки нули. Притом, ако је форма димензије простора на коме је дефинисана једнака нули на некој бази, онда је она нула-форма, тј. $\omega^{\wedge n} = 0$. ■

Дакле, према последњем ставу, на *свакој* симплектичкој многострукости имамо *канонски задату* форму оријентације $\Omega = \omega^n/n!$

Као још једну разлику Риманове и симплектичке геометрије наведимо и то да Риманова структура постоји на свакој многострукости, док је симплектичка изразито селективна - већ смо видели да је прва опструкција димензија многострукости која мора да буде парна. Још једна опструкција за постојање симплектичке структуре на затвореној многострукости M димензије $2n$ је тривијалност неке од парних Де-Рамових кохомологија, $H^{2i}_{dR}(M) = 0$, за неко $0 \leq i \leq n$ (погледати [3]).

Пример 1.2. (Симплектичке сфере) Према претходном, једина сфера $\mathbb{S}^n$, која евентуално допуша симплектичку структуру је $\mathbb{S}^2$, јер таква мора бити парнодимензиона и да важи $H^2_{dR}(M) \neq 0$, те је то једино могуће за $n = 2$.

Са друге стране, сфера $\mathbb{S}^2$, има форму оријентације ω која је наслеђена из $\mathbb{R}^3$ као $\omega = i_{\boldsymbol{n}}(dx \wedge dy \wedge dz)$, где је $\boldsymbol{n}$ векторско поље нормала на сфери. Форма оријентације за дводимензионе многострукости је симплектичка форма, јер је затворена због димензије, а недегенерисана из става 1.2. Из истог разлога су све оријентисане површи симплектичке.

Пример 1.3. (Котангентно раслојење) Раније смо нагласили да, за разлику од Риманове, не допушта свака многострукост симплектичку структуру. Међутим, над сваком многострукошћу M се налази природни симплектички објекат. Наиме, котангентно раслојење

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T^*_p M$$

које је природно раслојење над M је симплектичка многострукост. Нека је $\pi : T^*M \to M$ пројекција контангентног раслојења. Тада је са

$$\lambda(p) = \pi^*_{\pi(p)}(p)$$

дефинисана *Лиувилова форма* $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$. Уочимо карту U на M, локалне координате $(q_1, ..., q_n)$ у тој карти, и ковекторе $(p_1, ..., p_n)$ који су дуални овим координатама у смислу $p_i(\frac{\partial}{\partial q_j}) = \delta_{ij}$. Тада се из дефиниције Лиувилове форме може показати да је њен запис на U у овим координатама

$$\lambda = p_1 dq_1 + ... + p_n dq_n.$$

Тада форма $\omega = -d\lambda$ у истим координатама има запис

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 + ... + dq_n \wedge dp_n,$$

што је запис стандардне симплектичке форме ω_0 на $\mathbb{R}^{2n}$, па је према томе форма ω симплектичка. Заправо, видимо да су ово Дарбуове координате околине U на T^*M. Одавде следи да је ω канонски задата симплектичка форма, а T^*M симплектичка многострукост. Нека је $0_M : M \to T^*M$ нулто сечење раслојења π. Тада важи следећи став.

Став 1.3. Форма ω на T^*M се анулира на $0_M(M)$.

Доказ. Следи тривијално из координатног записа ω. Наиме, на $0_M(M)$ су координате p_i све одреда једнаке нули, те је и $\lambda = 0$ на $0_M(M)$, па самим тим и ω. ■

Пошто је $0_M(M)$ дифеоморфна слика M често га и обележавамо са M. Наведимо за крај ове секције још један важан пример симплектичке многострукости.

Пример 1.4. (Фубини-Штудијева форма) Комплексни пројективни простор, $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0)/\mathbb{C}^*$ има *хомогене координате* $[z_0 : \cdots : z_n]$, наслеђене из $\mathbb{C}^{n+1}$, које га чине глатком многострукошћу. *Фубини-Штудијева форма* се у овим координатама дефинише као

$$\omega_{FS} := \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log |z|^2.$$

Када се претходни израз израчуна добија се

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sum_{j=0}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j}{|z|^2} - \frac{\sum_{j=0}^{n} \overline{z}_j dz_j \wedge z_k d\overline{z}_k}{|z|^4}\right).$$

Испоставља се да је ово добро дефинисана недегенерисана и затворена форма на $\mathbb{C}P^n$, као и да је симплектичка површина $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^n$

$$\int_{\mathbb{C}P^1} \omega_{FS} = \pi.$$

Знајући да је $H_2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, и да је генерисана фундаменталном класом $\mathbb{C}P^1$ добијамо да су вредности Фубини-Штудијеве форме целобројни умношци π на целобројној хомологији, илити важи да је $\frac{1}{\pi}\omega_{FS} \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$. Ово је важно својство Фубини-Штудијеве форме које ћемо користити у наставку текста. Наведимо још једно важну особину ове симплектичке структуре на $\mathbb{C}P^n$. За доказ видети [36].

Став 1.4. Лопта (B^{2n}, ω_0) се симплектоморфно улаже у $\mathbb{CP}^n$ тако да јој је слика $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}P^n$. ■

1.2 Хамилтонова динамика

Корени симплектичке геометрије сежу у радове В. И. Арнољда који се бавио класичном механиком и Хамилтоновом динамиком. Симплектичка геометрија се показала као природни језик за описивање закона из ових области физике, независно од координата. Самим тим, појмови Хамилтонијана, Хамилтоновог векторског поља и његовог тока су централни у изучавању симплектичке структуре на многострукости. Уведимо зато неколико дефиниција.

Дефиниција 1.8. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост, и $H : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на њој. Због недегенерисаности форме ω добро је дефинисано векторско поље X_H формулом

$$\omega(\cdot, X_H) = dH(\cdot). \tag{1.2}$$

Функцију H називамо *Хамилтонијаном*, а векторско поље X_H *Хамилтоновим векторским пољем* на многостукости (M, ω).

Приметимо да је ова дефиниција аналогон градијенту на Римановој многострукости. Зато се поље X_H често назива *симплектичким градијентом* Хамилтонијана H. Аналогно градијентном току, ток овог векторског поља се назива *Хамилтоновим током* или *Хамилтоновим кретањем.* Решење диференцијалне једначине

$$\dot{x} = X_H(x) \tag{1.3}$$

се зове *Хамилтонова орбита*, и специјално, ако за неко $T > 0$ важи $x(T) = x(0)$ ово решење зовемо периодичним решењем Хамилтоновог система или *периодичном Хамилтоновом орбитом.* Постојање овавких орбита су од великог значаја у симплектичкој топологији, обзиром да је цела област у почецима мотивисана небеским кретањима и њиховом механиком, где је периодичност кретања неког система често питање. Наведимо још један термин који се често користи у Хамилтоновој динамици.

Дефиниција 1.9. *Осцилацијом Хамилтонијана H* зовемо разлику између максималне и минималне вредности,

$$\mathrm{Osc}(H) = \sup(H) - \inf(H).$$

Вратимо се на једначину (1.2), којом дефинишемо Хамилтоново векторско поље. Када је напишемо у Дарбуовим координатама $(x_1, x_2, .., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$, у којима се форма ω записује са $\omega = dx_1 \wedge dy_i + \cdots + dx_n \wedge dy_n$, добијамо координате симплектичког градијента (ради краћег записа уведимо ознаке $\frac{\partial H}{\partial x} = (\frac{\partial H}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial x_n})$ и $\frac{\partial H}{\partial y} = (\frac{\partial H}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial y_n})$)

$$X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}\right),$$

а самим тим и једначине њему придруженог Хамилтоновог тока

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}} \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ове једначине се зову *Хамилтонове једначине* и нашироко су познате у теоријској механици.

Приметимо да су координате симплектичког градијента сличне координатама обичног градијента у Еуклидским координатама $\nabla H = (\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y})$. Прецизније, важи следећи став:

Став 1.5. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост са комплексном структуром J која је сагласна са ω, тј. важи да је $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ Риманова метрика на M. Тада за произвољан Хамилтонијан H важи

$$X_H = J\nabla H, \tag{1.5}$$

при чему је градијент ∇H дефинисан преко g. Специјално, ово важи у симплектичком векторском простору $\mathbb{R}^{2n}$, са стандардном комплексном структуром J и Еуклидском метриком.

Доказ. Иде директно преко дефиниције (симплектичког) градијента и услова сагласности. ∎

Наведене Хамилтонијане у симплектичкој геометрији називамо *аутономним Хамилтонијанима.* Осим таквих, од суштинског значаја су и тзв *неаутономни Хамилтонијани*, тј. функције $H : M \times I \to \mathbb{R}$, где $I = [0, 1]$ представља време. Тада је за рестрикцију Хамилтонијана H_t у временском тренутку t добро дефинисано векторско поље X_{H_t}, које зависи од времена. Да би ово поље имало добро дефинисан ток, према теорији обичних диференцијалних једначина, довољно је узети да Хамилтонијан H има компактан носач, па ћемо то претпостављати у наредном тексту, сем ако се нагласи другачије. Наведимо прва важна својства Хамилтоновог тока:

Став 1.6. Нека је (M, ω) симплектичка многостукост са Хамилтонијаном $H : M \times I \to \mathbb{R}$, и одговарајућим Хамилтоновим векторским пољем X_{H_t}. Тада важи:

1) Његов ток ϕ_H^t чува симплектичку форму. Другим речима, за свако t, ϕ_{H_t} је симплектоморфизам.

2) **(Закон одржања енергије)** Ток чува Хамилтонијан H.

Доказ. И 1) и 2) се доказује Картановом формулом, уз чињеницу да је ω затворена (за 1)) и антисиметрична (за 2)). ∎

Тврђење 2) се зове закон одржања енергије јер се у Хамилтоновој механици (као области теоријске физике) за Хамилтонијан узима укупна енергија система, а Хамилтоново кретање управо представља ток физичког система кроз време, имамо да се овим кретањем очувава енергија, закон који је познат у теоријској физици. Наведимо још један често коришћен термин у Хамилтоновој динамици:

Дефиниција 1.10. Под *интегралом Хамилтоновог система* (1.3) са Хамилтонијаном H подразумевамо сваку функцију F која се очувава током тог система, тј. за коју важи $dF(X_H) = L_X F = 0$.

Дакле, претходни став под 2) говори да је један од интеграла Хамилотоновог кретања сам Хамилтонијан.

Дефиниција 1.11. Са $Symp(M)$ означавамо групу симплектоморфизама симплектичке многострукости M, а са

$$Ham(M) = \{\phi_H^1 \mid H : M \times I \to \mathbb{R}, H \in C_c(M \times I)\}$$

групу Хамилтонових дифеоморфизама.

Према томе, овиме добијамо да група симплектоморфизама $Symp(M)$ симплектичке многострукости садржи групу $Ham(M)$ Хамилтонових дифеоморфизама (чињеница да је $Ham(M)$ група је нетривијална и доказана је у [41]), па је према томе она бесконачнодимензиона Лијева група, насупрот групи изометрија у Римановој геометрији која је генерички тривијална, а увек коначне димензије (видети [38]). Дакле, симплектичка геометрија даје далеко богатију структуру трансформација.

Наведимо још једно познато тврђење из класичне механике, које је тривијална последица свега наведеног. На простору $\mathbb{R}^{2n}$ са Vol означавамо стандардну форму запремине, тј. $Vol = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots dx_n \wedge dy_n$

Теорема 1.3. (Лиувилова теорема) Симплектичка пресликавања чувају запремину фазног простора. Другим речима, ако је ϕ симплектоморфизам $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, онда важи $\phi^* Vol = Vol$.

Доказ. Приметимо да је $\omega_0^{\wedge n} = n! Vol$ (простим рачуном), те ако важи $\phi^*\omega = \omega$, онда важи и $\phi^* Vol = Vol$, јер пулбек пролази кроз клинасти производ. ∎

Битно својство симплектичких пресликавања је то да она чувају Хамилтоново векторско поље, односно ови Хамилтонови токови су *конјуговани*. Наиме, важи следећи став:

Став 1.7. Ако је $\varphi : (M, \omega) \to (N, \Omega)$ симплектоморфизам, онда за произвољни Хамилтонијан $H : N \to \mathbb{R}$ важи $\varphi^*(X_H) = X_{H\circ\varphi}$.

Доказ. Иде директно из дефиниције Хамилтоновог векторског поља и чињенице да је φ симплектоморфизам. ∎

Наведимо још једну лему везану за (Хамилтонове) симплектоморфизме у $\mathbb{R}^{2n}$ која ће нам бити од вишеструке користи у каснијем тексту.

Дефиниција 1.12. *Звездасти скуп* у $\mathbb{R}^n$ је скуп $U \subset \mathbb{R}^n$ у коме постоји тачка x_0 таква да за сваку другу тачку $x \in U$ дуж $[x_0, x]$ припада U. *Звездасти домен* је отворен звездасти скуп. Звездасти скупови су уопштења конвексних.

Лема 1.2. (Принцип проширења након рестрикције) Претпоставимо да је $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ симплектичко улагање ограниченог звездастог домена $U \subset \mathbb{R}^{2n}$. Тада за сваки подскуп $A \subset \overline{A} \subset U$ постоји Хамилтонов дифеоморфизам Φ_A од $\mathbb{R}^{2n}$ са компактним носачем такав да је $\Phi_A|_A = \phi|_A$.

Доказ. Видети [46]. ∎

1.3 Лагранжеве подмногострукости

Видели смо у ставу 1.3 да се симплектичка форма на T^*M анулира на подмногострукости M. Ово је специјалан случај важног примера подмногострукости у симплектичкој геометрији, те дефинишемо:

Дефиниција 1.13. Подмногострукост L симплектичке многострукости (M, ω), при чему је $dimM = 2n$, се назива *Лагранжевом* ако важи $dimL = n$ и $\omega_{|L} = 0$, при чему се мисли на рестрикцију форме на тангентном раслојењу од L.
Општије, имерзију

$$j : L \to M$$

називамо *Лагранжевом имерзијом* ако је $j^*\omega = 0$.

Одмах из дефиниције имамо следећи став:

Став 1.8. Подмногострукост L симплектичке многострукости (M, ω) је Лагранжева акко важи $TL = TL^{\perp_\omega}$. ■

Имајући ово у виду наведимо општију дефиницију.

Дефиниција 1.14. Подмногострукост $L \subset (M, \omega)$ зовемо *изотропном* односно *коизотропном* ако важи $TL \subset TL^{\perp_\omega}$, односно $TL^{\perp_\omega} \subset TL$.

У симплектичкој топологији важи фолклор „све је Лагранжева многострукост" који је оправдан чињеницом да је M Лагранжева подмногострукост од T^*M. Ове подмногострукости су важне и због тога што класификују симплектоморфизме, о чему сведочи следећи став.

Став 1.9. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Тада је $M \times M$ симплектичка многострукост са формом $\Omega = \pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega$, где су π_1 и π_2 пројекције на прву и другу координату. Дифеоморфизам $\phi : M \to M$ је симплектоморфизам акко је његов график Лагранжева подмногострукост у $(M \times M, \Omega)$. ■

Наведимо за крај својство производа Лагранжевих многострукости, које се доказује директно из дефиниције.

Лема 1.3. Ако су $L_1 \subset (M_1, \omega_1)$ и $L_2 \subset (M_2, \omega_2)$ Лагранжеве, онда је таква и $L_1 \times L_2 \subset (M_1 \times M_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$ ■

1.4 Контактне многострукости

Симплектичка топологија, као што смо на више места истакли, има домет само у парним димензијама. Међутим, њен парњак у непарним димензијама је контактна топологија. Дефинишимо најпре контактну структуру:

Дефиниција 1.15. *Контактна структура* на многострукости P димензије $2n+1$ је глатка фамилија $\xi \subset TP$ тангентних хиперпростора (глатка $2n-$дистрибуција) која је *максимално неинтеграбилна*, односно локално задата 1-формом $\alpha; \xi = ker(\alpha)$ за коју важи

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0.$$

Многострукост P заједно са контактном структуром ξ се назива *контактном многострукошћу.*

Услов максималне неинтеграбилности долази из Фробенијусове теореме (в. нпр. [35]):

Теорема 1.4. (Фробенијус) Дистрибуција ξ кодимензије 1 локално задата 1-формом α је интеграбилна акко је $\alpha \wedge d\alpha = 0$. ■

Форма α из претходне дефиниције се зове *контактна форма.* Она није јединствено одређена. Заиста, за сваку функцију $f > 0$ форма $\beta = f\alpha$ такође одговара дистрибуцији ξ. Такође, она је задата само локално, контактна структура која има глобалну 1-форму α такву да је $\xi = ker(\alpha)$ зове се *коориjентабилном.* Већина познатих контактних структура су овакве па ћемо услов кооријентабилности подразумевати у наредном тексту.

Пример 1.5. Основни пример контактне многострукости, аналоган $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ у симплектичкој топологији, је $\mathbb{R}^{2n+1}$ са координатама $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z)$ и контактном формом $\alpha_0 = dz + \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k$.

За сваку контактну форму α постоји јединствено векторско поље R које задовољава

$$i(R)d\alpha = 0, \quad \alpha(R) = 1.$$

Такво поље се назива *Ребовим векторским пољем.* Оно зависи од контактне форме α а не само од контактне структуре ξ. Из Картанове формуле закључујемо да $L_R\alpha = 0$, тј. да ток Ребовог поља чува контактну форму α а тиме и контактну структуру ξ.

Свакој контактној многострукости можемо придужити симплектичку. Наиме:

Дефиниција 1.16. Симплектизација контактне многострукости (P, α) је симплектичка многострукост $P \times \mathbb{R}$ са симплектичком формом $\omega = d(e^t \alpha)$.

Постоји и донекле обрнут процес. Наиме, симплектичка многострукост T^*M се може пројектизовати по фибрама, $P(T^*M) = (T^*M - 0_M)/\sim$. Тада је $(P(T^*M), \lambda)$ контактна многострукост, где је λ Лиувилова форма.

На крају ове секције додајмо и то да постоји аналогон Дарбуовој теореми 1.2 у контактној топологији.

Теорема 1.5. (Дарбуова теорема) Свака контактна многострукост је локално изоморфна стандардној контактној многострукости $(\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_0)$.

1.5 Хиперповрши у симплектичком амбијенту

Овде ћемо дефинисати неке специјалне класе хиперповрши у симплектичком амбијенту које ће нам бити корисне. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост, и $S \subset M$ хиперповрш, односно подмногострукост димензије $dim(M) - 1$. Рестрикција симплектичке форме на TS је дегенерисана, будући да је S непарне димензије. Њено језгро је стога нетривијално. Прецизније, важи:

Став 1.10. $ker(\omega_{|TS}) = \{(x, \xi) \in T_xS \mid \omega_x(\xi, \cdot) = 0\}$ је једнодимензионо раслојење над S.

Доказ. Пре свега, ово раслојење је нетривијално, дакле димензије бар 1. Претпоставимо супротно, тј. да постоје два линеарно независна вектора u_x и v_x који су симплектички ортогонални на цео T_xS. То значи да је $T_xS \subset \langle u_x, v_x\rangle_\omega^\perp$. Међутим, димензија $\langle u_x, v_x\rangle^{\perp_\omega}$ је $dim(M) - 2$, из својства (1.1), па је ово немогуће. ■

Претходни став оправдава следећу дефиницију.

Дефиниција 1.17. *Карактеристично линијско раслојење* хиперповрши S је $\mathcal{L}_S = ker(\omega_{|TS})$. *Затворена карактеристика* на S је свака затворена крива на S (тј. $P = j(\mathbb{S}^1)$, где је $j : \mathbb{S}^1 \to$ улагање) таква да је

$$TP = \mathcal{L}_{\mathcal{S}}|_P.$$

Скуп свих затворених карактеристика хиперповрши S обележавамо са $\mathcal{P}(S)$.

Основно и још увек отворено питање које се овде поставља је да ли је $\mathcal{P}(S)$ уопште непразан за произвољну хиперповрш, тј. да ли произвољна хиперповрш уопште има затворену карактеристику. Одговор се може наћи у виду постојања периодичних орбита Хамилтоновог система на M. Наиме, ако је S задата као *површ енергије* Хамилтонијана $H : M \to \mathbb{R}$, односно $S = H^{-1}(c)$ за неко $c \in \mathbb{R}$, које је регуларна вредност, важи да је

Став 1.11. Скуп периодичних Хамилтонових орбита на $S = H^{-1}(c)$ се поклапа са $\mathcal{P}(S)$.

Доказ. Најпре приметимо да Хамилтонов систем Хамилтонијана H рестрикован на S остаје на њој. Ово важи јер је векторско поље $X_H|S$ на TS. Ово важи јер је $TS = ker(dH)$, а $dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$. Даље, важи да је $X_H \neq 0$ на

S. Заиста, из дефиниције X_H следи да би у супротном било $dH(x) = 0$ у некој тачки $x \in S$ а то је немогуће због регуларности c. Следеће приметимо да је X_H не-нула сечење раслојења $\mathcal{L}S$, јер је за произвољну тачку $x \in S$

$$\omega_x(\xi, X_H) = dH(\xi) = 0,$$

за свако $\xi \in TS = ker(dH)$. Нека је P произвољна периодична Хамилтонова орбита на S. Тада је њено тангентно раслојење одређено Хамилтоновим векторским пољем које сече карактеристично раслојење, те је онда $P \in \mathcal{P}(S)$. Са друге стране, нека је P затворена карактеристика. Тада постоји њена параметризација $\gamma : I \to P$, и важи да је $X_H(\gamma(t)) = f(t)\gamma'(t)$, за неку функцију $f \neq 0$. Мењањем оријентације γ можемо постићи да је $f > 0$. Тада погодном репараметризацијом Ψ можемо постићи да је $\gamma \circ \Psi$ баш Хамилтонова орбита. ■

Дефинишимо сада важан пример хиперповрши у симплектичком амбијенту који уопштава границе звездастих а самим тим и конвексних домена.

Дефиниција 1.18. Компактна хиперповрш S у (M, ω) је *контактног типа* ако постоји 1-форма α на S таква да важи

1) $d\alpha = j^*\omega$

2) $\alpha(\xi) \neq 0$, за $0 \neq \xi \in \mathcal{L}_S$

где је $j : S \to M$ инклузија.

Важи следећи став који оправдава овај назив.

Став 1.12. Хиперповрш S контактног типа је контактна многострукост са контактном формом α.

Доказ. Обзиром да је $\xi \in \mathcal{L}_S$ генератор језгра $\omega|_S$ и $\alpha(\xi) \neq 0$, језгро α је $(2n-2)-$димензиони потпростор од T_xS на коме је форма ω па тиме и $d\alpha$ недегенерисана. Према ставу 1.2 закључујемо да је $(d\alpha)^{n-1} \neq 0$ на $ker\alpha$, што нам даје $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)} \neq 0$ ■

Напомена: Како смо закључили да хиперповрш контактног типа S има форму запремине $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)}$ она је и оријентабилна многострукост.

Форму α на S можемо проширити на околини S. Прецизније, важи следећа лема (за доказ погледати [33], глава 4):

Лема 1.4. Ако је $S \in (M, \omega)$ контактног типа, тада постоји 1-форма τ на околини U од S тако да важи

1) $d\tau = \omega$ на U

1) $j^*\tau = \alpha$ на S.

Важи и алтернативна дефиниција хиперповрши контактног типа на језику векторских поља, по А. Вајнштајну ([48]).

Став 1.13. Компактна хиперповрш $S \subset M$ је контакнтог типа акко постоји векторско поље X на околини U од S које задовољава

1) $L_X\omega = \omega$ на U.

2) $X(x) \notin T_xS$ за $x \in S$. Другим речима X је трансверзално на S.

Доказ. Најпре из претходне леме знамо да форма α може да се прошири на околину $U \supset S$, добивши форму τ. Даље, доказ у оба смера иде директно, коресподенцијом

$$i_X\omega = \tau \quad \text{на} \quad U.$$

■

Имајући у виду лему 1.4, можемо захтевати јачи услов да је 1-форма τ дефинисна на целој многострукости (M, ω). Међутим, онда дефиниција постаје рестриктивнија, те отуд и назив.

Дефиниција 1.19. Компактна хиперповрш S у (M, ω) је *рестрикованог контактног типа* ако постоји 1-форма α на M таква да важи

1) $d\alpha = \omega$

2) $\alpha(\xi) \neq 0$, за $0 \neq \xi \in \mathcal{L}_S$.

Ове врсте хиперповрши ће нам бити од користи у наредном тексту.

2 Функционал дејства

У овој глави се бавимо функционалом дејства, једним од најважнијих објеката у симплектичкој топологији и Хамилтоновој механици. Његово главно својство је да су његове критичне тачке Хамилтонове орбите, те се зато он може ефикасно користити као средство за проналажење истих. Теорију изложену у овој глави су најпре Екеланд и Хофер, а потом Хофер и Цендер користили ради конструисања капацитета. Специјално, крајњи резултат ове главе је теорема 2.2 коју ћемо користити у глави 5 ради доказивања својства нормализације Хофер-Цендеровог капацитета.

2.1 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 2.1. Симплектичка многострукост (M, ω) је *тачна* ако је њена симплектичка форма тачна, тј. $\omega = d\lambda$, за неку 1-форму λ.

Примери тачних симплектичких многострукости су котангентна раслојења T^*M, а самим тим и $\mathbb{R}^{2n}$. Ниједна од ових није компактна, што и не чуди. Наиме имамо следећи став:

Став 2.1. Затворена симплектичка многострукост не може бити тачна.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да је M заворена и тачна, $\omega = d\lambda$. Тада из затворености ω следи $\omega^{\wedge n} = d(\lambda \wedge \omega^{\wedge n-1})$. Сада из Стоксове теореме имамо

$$\int_M \omega^{\wedge n} = \int_{\partial M} \lambda \wedge \omega^{\wedge n-1} = 0.$$

■

Дефиниција 2.2. Нека је $(M, \omega = d\lambda)$ тачна симплектичка многострукост. *Дејство* глатке петље $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ је

$$\mathcal{A}_0(\gamma) = \int_\gamma \lambda.$$

Функционал дејства Хамилтонијана $H : M \times I \to \mathbb{R}$ је

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \int_\gamma \lambda - \int_0^1 H(\gamma(t), t) dt.$$

Као што смо раније напоменули, стандардна симплектичка многострукост $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ је тачна. Специјално, у њој се функционал дејства $\mathcal{A}_H$ записује и у облику:

Став 2.2. За криву $x \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ параметризовану са $x(t)$, $0 \leq t \leq 1$ и Хамилтонијан $H : \mathbb{R}^{2n} \times I \to \mathbb{R}$ важи

$$\mathcal{A}_H(x(t)) = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}\langle -J\dot{x}, x\rangle - H(x(t), t)\Big] dt.$$

Доказ. Једино треба продискутовати први део интеграла. Он се добија тако што распишемо $\lambda = \sum x_i dy_i$, директним рачуном. ■

Функционал $\mathcal{A}_H$ је од централне важности у симплектичкој топологији. Једна од његових главних својстава је да су *критичне тачке овог функционала периодичне Хамилтонове орбите.* Ово можемо показати на неформалном нивоу. Нека је $\Omega = C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ векторски простор глатких петљи у $\mathbb{R}^{2n}$. Тада је $\mathcal{A}_H : \Omega \to \mathbb{R}$. Рачунајући извод у тачки $x \in \Omega$ у правцу $y \in \Omega$ налазимо

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(x)(y) &= \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}_H(x + \varepsilon y) \mid_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\langle -J\dot{x} - \nabla H(x), y\rangle dt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Последично, $\mathcal{A}'_H(x)(y) = 0$ за све $y \in \Omega$ акко петља x задовољава једначину

$$-J\dot{x}(t) - \nabla H(x(t)) = 0,$$

односно $x(t)$ је решење Хамилтонове једначине које такође задовољава $x(0) = x(1)$. Овај принцип је нашироко познат у класичној механици као принцип *најмањег дејства* који каже да се систем креће тако да је варијација дејства најмања, тј. једнака нули, што на језику математике значи да је Хамилтонова орбита критична тачка функционала $\mathcal{A}_H$. Међутим, овај функционал је веома дегенерисан, наиме он нема глобални минимум нити максимум. Заиста, узимајући петље x_k $(k \in \mathbb{Z})$

$$x_k(t) = e^{k2\pi Jt}\xi, |\xi| = 1,$$

закључујемо да је први део функционала $\mathcal{A}_H$ једнак

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\langle -J\dot{x}_k, x_k\rangle dt = \pi k,$$

док други део остаје ограничен, H је непрекидан и $|x_k(t)| = 1$. Дакле функционал $\mathcal{A}_H$ је неограничен и одозго и одоздо. Специјално, варијационе технике које користе минимизујуће низове се не могу применити на њега. Ово је у контрасту са вариационим принципом за затворене геодезијске на Римановим многострукостима. Овај геометријски проблем је развио две моћне вариационе технике, Морсову и Љустерник-Шнирељманову теорију. Међутим, Морсова теорија није директно примењива на функционал $\mathcal{A}_H$, јер су Морсови индекси његових критичних тачака бесконачни, и стога, тополошки невидљиви.

Изборивши се са овом незгодом функционала дејства, П. Рабиновиц у радовима [42] и [43] из 1978 и 1979. уводи специјални *минимакс принцип* адаптиран структури овог функционала, са циљем да докаже постојање Хамилтонових орбита на одређеним површима енергије. Ову минимакс теорију излажемо у циљу доказивања нормализације Хофер-Цендеровог капацитета, јер се она своди на доказивање постојања периодичне Хамилтонове орбите, управо оно за шта је Рабиновиц користио минимакс теорију.

2.2 Идеја минимакс принципа

Приступ минимакс теорији је данас разнолик. Другим речима, постоји више теорема са различитим условима, али све имају за циљ налажење критичних вредности функционала. Једна од њих је заснована на језику Хилбертових простора, и њу ћемо овде изложити. Нека је E Хилбертов простор и $f : E \to \mathbb{R}$ C^1-гладак функционал на њему. Обзиром да E није компактан, не можемо очекивати критичне тачке ако не захтевамо некакав додатни услов за f. Дефинишимо зато услов компактности:

Дефиниција 2.3. Функционал f на Хилбертовом простору E задовољава *Пале-Смејлов услов компактности* (скраћено ПС) ако сваки низ $x_n \in E$ са својствима

$$\sup_{n\in N} |f(x_n)| < \infty, \text{ и } \nabla f(x_n) \to 0$$

поседује конвергентан подниз. Обзиром да је $f \in C^1$, лимес овог подниза је критична тачка f.

Дефиниција 2.4. Нека је дата фамилија $\mathcal{F}$ непразних подскупова Хилбертовог простора E. Дефинишемо *минимакс вредност* функционала f у односу на фамилију $\mathcal{F}$ на следећи начин:

$$c(f, \mathcal{F}) = \inf_{F\in\mathcal{F}} \sup_{x\in F} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Пробајмо да протумачимо вредност $c(f, \mathcal{F})$. Супремум функције f на неком скупу F је најмања вредност $c \in \mathbb{R}$ таква да је $F \subset E^{\leq c} := \{x \in E \mid f(x) \leq c\}$. Када овако посматрамо, $c(f, \mathcal{F})$ је заправо најмања вредност $c \in \mathbb{R}$ таква да за свако $\varepsilon > 0$ можемо наћи $F \in \mathcal{F}$ такво да је $F \subset E^{\leq c+\varepsilon}$.

Дефиниција 2.5. За фамилију $\mathcal{F}$ кажемо да је *позитивно инваријантна* у односу на ток φ_t, $t \in \mathbb{R}$, ако за свако $F \in \mathcal{F}$ и за свако $t > 0$, важи да је $\varphi_t(F) \in \mathcal{F}$.

Докажимо сада споменуту минимакс лему која нам гарантује критичну вредност функције.

Теорема 2.1. (Минимакс лема) Нека функционал $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ и фамилија подскупова $\mathcal{F}$ задовољавају следеће услове:

1) f задовољава ПС услов

2) ток φ_t векторског поља $-\nabla f$ је дефинисан за свако $t \in \mathbb{R}$

3) фамилија $\mathcal{F}$ је позитивно инваријантна у ондосу на ток φ_t

4) $-\infty < c(f, \mathcal{F}) < +\infty$.

Тада је $c(f, \mathcal{F}) \in \mathbb{R}$ критична вредност функционала f, тј. постоји тачка $x^* \in E$ таква да важи $\nabla f(x^*) = 0$ и $f(x^*) = c(f, \mathcal{F})$.

Доказ. Уведимо ознаку $c = c(f, \mathcal{F})$. Доказаћемо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $x \in M$ тако да:

$$c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon \quad \text{и} \quad ||\nabla f(x)|| > \varepsilon.$$

Тада узимањем за $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, налазимо низ x_n који задовољава PS услов, одакле ће следити да је постоји његов подниз који конвергира ка критичној тачки $p \in M$, $f(p) = c$.

Претпоставимо супротно, тј. да постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $||\nabla f(x)|| \geq \varepsilon$ кад год је $c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon$. По дефиницији минимакс вредности, постоји $F \in \mathcal{F}$ такво да $\sup\limits_{x \in F} f(x) \leq c + \varepsilon$.

Нека је $x \in F$. Тада је $f(x) \leq c + \varepsilon$ и тврдимо да ће $f(\varphi_{t^*}) \leq c - \varepsilon$ за $t^* = \frac{2}{\varepsilon}$. Ако је $f(\varphi_t) \leq c - \varepsilon$ за неко $0 \leq t \leq t^*$, онда тврђење тривијално важи, јер функција опада дуж градијентог тока. Претпоставимо зато да је $f(\varphi_t) > c - \varepsilon$ за све $0 \leq t \leq t^*$. Тада из претпоставке да је $||\nabla f(x)|| \geq \varepsilon$, имамо $||\nabla f(\varphi_t(x))|| \geq \varepsilon$, за $0 \leq t^* \leq t$, па је $f(\varphi_t(x)) \leq f(x) - \varepsilon^2$. Даље, имамо да је $f(\varphi_t^*(x)) \leq c + \varepsilon - \varepsilon^2 t^* = c - \varepsilon$. Ако узмемо да је $F^* = \varphi_{t^*}(F)$, доказали смо:

$$\sup_{x \in F^*} f(x) \leq c - \varepsilon.$$

Како је фамилија $\mathcal{F}$ позитивно инваријантна у односу на ток φ_t, знамо да је $F^* \in \mathcal{F}$, чиме добијамо контрадикцију. ∎

2.3 Проширење простора петљи

Да бисмо користили управо изложену минимакс теорију, потребно је функционал $\mathcal{A}_H$ са простора глатких петљи $\Omega = C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ проширити на Хилбертов простор, на коме ће нам онда минимакс лема 2.1 дати периодично решење, за које онда треба доказати да припада првобитном простору. Најпре, приметимо да се свака периодична петља из Ω се може представити Фуријеовим редом

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2k\pi Jt} x_k,\ \ x_k \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{2.2}$$

који конвергира заједно са својим изводима у супремум норми. Означимо са

$$a(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}\langle -J\dot{x}, x\rangle dt.$$

и

$$b(x) = \int_0^1 H(x(t), t)dt.$$

први и други део функционала дејства, $\mathcal{A}_H(x) = a(x) - b(x)$. Када се убаци (2.2) у $a(x)$, имајући у виду да је

$$\int_0^1 \langle e^{j2\pi Jt} x_j, e^{k2\pi Jt} x_k\rangle dt = \delta_{jk}\langle x_j, x_k\rangle,$$

добијамо

$$\begin{aligned} a(x) &= \pi \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\langle x_j, x_j\rangle \\ &= \pi \sum_{j>0} |j|\langle x_j, x_j\rangle - \pi \sum_{j<0} |j|\langle x_j, x_j\rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Дакле, природно се намеће потпростор петљи x из $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ таквих да је ред

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} j\langle x_j, x_j\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} j|x_j|^2 \tag{2.4}$$

апсолутно конвергентан. Ово је специјалан случај општијег Собољевог простора.

Дефиниција 2.6. Простор $H^s := H^s(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ је за $s \geq 0$ дефинисан са

$$H^s(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}) = \Big\{ x \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}) \mid \sum_{j\in\mathbb{Z}} |j|^{2s}|x_j|^2 < \infty \Big\},$$

где је

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2j\pi Jt} x_j, \;\; x_j \in \mathbb{R}^{2n}$$

Фуријеова трансформација x која конвергира у $L^2 := L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$.

Простори H^s су Хилбертови простори са скаларним производом и придруженом нормом Собољева датом са

$$\langle x, y\rangle_s = \langle x_0, y_0\rangle + 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s} \langle x_k, y_k\rangle$$

$$\|x\|_s^2 = \langle x, x\rangle_s,$$

за све $x, y \in H^s$ Приметимо да је $H_0 = L^2$, као и да је норма $\|x\|_0$ еквивалентна L^2-норми. Нама је због (2.4) од посебног значаја простор $H^{1/2}$ који ће бити тражени Хилбертов простор на који проширујемо наш функционал $\mathcal{A}_H$. Зато ћемо означавати са

$$E := H^{1/2}$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{1}{2}} \text{ и } \|\cdot\| = \|\cdot\|_{\frac{1}{2}}.$$

Простор E се ортогонално раздваја на

$$E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$$

три простора који имају само Фуријеове коефицијенте за $j < 0, j = 0$ и $j > 0$, редом. Њима одговарају ортогоналне пројекције P^-, P^0 и P^+. Дакле, свако $x \in E$ има јединствену декомпозицију $x = x^- + x^0 + x^+$. Према (2.3) важи $a(x) = \frac{1}{2}\|x^+\|^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2$, за све $x \in \Omega$, те се овај део функционала природно проширује на E, тако да добијамо функционал $a : E \to \mathbb{R}$, чији је градијент

$$\nabla a(x) = (P^+ - P^-)(x) = x^+ - x^-, \tag{2.5}$$

у свакој тачки $x \in E$. Даље, приметимо нека битна својства простора H^s која ће нам касније бити од користи. Притом ћемо користити нека стандардна тврђења из функционалне анализе, за доказе истих видети [2]. Јасно је да се простори смањују

$$H^t \subset H^s \subset H^0,$$

за $t \geq s \geq 0$, док норме расту

$$\|x\|_t \geq \|x\|_s \geq \|x\|_0\,, \text{ за } x \in H^t.$$

Специјално, инклузије $I : H^t \to H^s$, за $t \geq s$ су непрекидне.

Став 2.3. Претпоставимо $t > s \geq 0$. Тада је инклузија $I : H^t \to H^s$ компактни оператор.

Доказ. Непрекидни оператор $P_N : H^t \to H^s$ дефинисан са

$$P_N(x) = \sum_{|k| \leq N} e^{k2\pi Jt} x_k$$

је коначно-димензионог ранга, и стога је компактан. Са друге стране, имамо

$$\begin{aligned} \|(P_N - I)x\|_s^2 &= \left\| \sum_{|k|>N} e^{k2\pi Jt} x_k \right\|_s^2 \\ &= 2\pi \sum_{k>|N|} |k|^{2s}|x_k|^2 = 2\pi \sum_{k>|N|} |k|^{2(s-t)}|k|^{2t}|x_k|^2 \\ &\leq N^{2(s-t)} 2\pi \sum_{k>|N|} |k|^{2t}|x_k|^2 \leq N^{2(s-t)} \|x\|_t^2\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Дакле, $P_N \to I$, кад $N \to \infty$ у операторској норми, те је и он сам компактан, јер су компакни оператори затворени за униформне лимесе. ■

Простор $\Omega = C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ је густ у H^s, за свако $s \geq 0$. Међутим, нису сви елементи из $H^{1/2}$ у класама непрекидних функција. Међутим, важи следећи став.

Став 2.4. Претпоставимо да је $s > \frac{1}{2}$. Ако је $x \in H^s$, тада је $x \in C := C(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$. Штавише, постоји константа $c = c_s$ таква да је

$$\sup_{0 \leq \ t \leq 1} \leq c\,\|x\|_s\,, \ x \in H^s.$$

Доказ. Доказаћемо да Фуријеов ред

$$x = \sum_k e^{k2\pi Jt} x_k$$

који конвергира у L^2 такође конвергира и у супремум норми, одакле ће да следи да $x \in C$ Ово следи из Хелдерове неједнакости $(2,2)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k\neq 0} \left\| e^{k2\pi Jt} x_k \right\|_\infty = \sum_{k\neq 0} |x_k| = \sum_{k\neq 0} |k|^{-s} |k|^s |x_k| \\ \leq (\sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|^{2s}})^{1/2} \cdot (\sum_{k\neq 0} |k|^{2s} |x_k|^2)^{1/2} \leq c \left\| x \right\|_s , \end{aligned} \tag{2.7}$$

где смо користили $2s > 1$. ■

Напоменимо да исти аргумент доказује општији став

Став 2.5. Ако је $s > \frac{1}{2} + r$, за неко природно r, тада $x \in H^s$ припада $C^r := C^r(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ и притом

$$\sup_{0 \leq j \leq r, 0 \leq t \leq 1} |D^j x(t)| \leq c \left\| x \right\|_s , \ x \in H^s.$$

■

Према ставу 2.3 инклузија $j : H^{1/2} \to L^2$ је компактан оператор. Самим тим, и његов адјунговани оператор $j^* : L^2 \to H^{1/2}$, дефинисан уобичајено са

$$\langle j(x), y \rangle_{L^2} = \langle x, j^*(y) \rangle, \tag{2.8}$$

је компактан (видети [2]).

2.3.1 Избор Хамилтонијана

Вратимо се на функционал $\mathcal{A}_H : \Omega \to \mathbb{R}$, кога је требало проширити на Хилбертов простор како би могли да користимо минимакс теорију развијену на овим просторима. Видели смо да се први део функционала природно проширује на E. Други део функционала, $b(x) = \int_0^1 (H(x(t), t) dt$ се међутим не може проширити на простор E за било какав Хамилтонијан H. Такође, да би добијени функционал $\mathcal{A}_H : E \to \mathbb{R}$, имао сва својства наведена у минимакс леми 2.1 потребно је да изаберемо специјалне Хамилтонијане H. Један од начина да се то уради је да захтевамо да H припада специјалном скупу Хамилтонијана.

Дефиниција 2.7. Означавамо са $\mathcal{H}$ скуп аутономних Хамитонијана $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ који задовољавају услове:

(1) $H = 0$ на отвореној околини U координатног почетка.

(2) $H(z) = Q(z)$ за $|z| > R$, где је Q квадратна форма а $R > 0$.

(3) Квадратна форма Q је облика $Q(x) = (\pi+\varepsilon)((x_1^2+y_1^2)+\frac{1}{N^2}\sum_{j=2}^{n}(x_j^2+y_j^2))$, где је $\varepsilon > 0, \varepsilon \notin k\mathbb{N}$.

Притом, околина U и R зависе од Хамилтонијана. За Хамилтонијан који задовољава услов 2) се у симплектичкој топологији каже да је *квадратан у бесконачности.* Идеја је да услове (1)-(3) на Хамилтонијану пребацимо на услове на функционалу $\mathcal{A}_H$ и његовом градијентном току који ће нам омогућити коришћење минимакс леме. Најпре, уочимо следећа својства:

Став 2.6. За сваки Хамилтонијан H који задовољава услове 1) и 2) постоји константа M таква да важи

(1) $|H(z)| \leq Mz^2$,

(2) $|\nabla H(z)| \leq M|z|$ и

(3) $|H_{zz}(z)| \leq M$,

за све $z \in \mathbb{R}^{2n}$.

Доказ. За $z > R$ имамо да је $H(z)$ једнак квадратној форми па постоји M_1 такво да је $|H(z)| \leq M_1 z^2$. Према 1) постоји r такво да је $H = 0$ на $B^{2n}(r)$. Стога је за $|z| < r$ свакако $|H(z)| \leq M_1 z^2$. Напослетку, за $r \leq |z| \leq R$, функција $\frac{H(z)}{z^2}$ је непрекидна на компакту те има максимум M_2. Сада узмемо $M = \max\{M_1, M_2\}$. Друго својство се слично доказује. На компакту $|z| \leq R$ фја $|H_{zz}|$ достиже максимум, а ван њега је H_{zz} једнака двострукој вредности квадратне форме, те је константна, па имамо и последње својство. На крају изаберемо за M максимум добијених три константи. ■

2.3.2 Својства проширеног функционала

Одавде па надаље претпостављамо да радимо са Хамилтонијаном $H \in \mathcal{H}$. На основу првог својства претходног става, функционал $b(x(t)) = \int_0^1 H(x(t))dt$ је дефинисан за свако $x \in L^2$, а самим тим и за свако $x \in E \subset L^2$. Дакле, успели смо да проширимо функционал $\mathcal{A}_H$ на E,

$$\mathcal{A}_H(x) = \frac{1}{2}\left\|x^+\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|x^-\right\|^2 - \int_0^1 H(x(t))dt,\ x \in E,$$

те га надаље разматрамо (заједно са a и b) на том простору. Докажимо да је $\mathcal{A}_H \in C^1(E, \mathbb{R})$. Са $\hat{b}$ обележимо проширење b на L^2. Дакле, важи $b(x) =$

$\hat{b}(j(x)), x \in E$, где је $j : E \to L^2$ инклузија. Важи да је функционал $\hat{b}$ диференцијабилан. Наиме, имамо

$$H(z+\xi) = H(z) + \langle \nabla H(z), \xi \rangle + \int_0^1 \langle \nabla H(z+t\xi) - \nabla H(z), \xi \rangle dt, \tag{2.9}$$

за све $z, \xi \in \mathbb{R}^{2n}$. Из $|H_{zz}| \leq M$ последњи израз је $\leq M|\xi|^2$. За $x \in L^2$ важи $\nabla H(x) := \nabla H(x(t)) \in L^2$, због $|\nabla H(z)| \leq M|z|$. Дакле, за $x, h \in L^2$ добијанмо интеграцијом

$$\hat{b}(x+h) = \hat{b}(x) + \int_0^1 \langle \nabla H(x), h \rangle dt + R(x,h),$$

при чему $|R(x,h)| \leq M \|h\|_{L_2}^2$. Ово нам даје диференцијабилност $\hat{b}$, са изводом једнаким

$$d\hat{b}(x)(h) = \int_0^1 \langle \nabla H(x), h \rangle dt = \langle \nabla H(x), h \rangle_{L^2},$$

што даје градијент $\nabla \hat{b}(x) = \nabla H(x) \in L^2$. Одавде и из (2.8) добијамо градијент од $b : E \to \mathbb{R}$,

$$\nabla b(x) = j^* \nabla \hat{b}(j(x)) = j^* \nabla H(x). \tag{2.10}$$

Уведимо једну важну класу пресликавања између Банахових па специјално и Хилбертових простора са којима радимо.

Дефиниција 2.8. Пресликавање $K : X \to Y$ између Банахових простора зовемо *компактним* ако ограничене скупове слика у релативно компактне.

Лема 2.1. Пресликавање $b : E \to \mathbb{R}$ је диференцијабилно. Његов градијент $\nabla b : E \to E$ је непрекидан и компактан. Штавише, важи

$$\|\nabla b(x) - \nabla b(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

Доказ. Слично својствима става 4.4, може се доказати да постоји $M > 0$ тако да је $|\nabla H(x) - \nabla H(y)| \leq M|x-y|$, за све $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$. Самим тим добијамо да је $x \to \nabla H(x)$ глобално Липшицово са константом M на L^2 и стога слика ограничене у ограничене скупове. Први део тврђења следи одавде и из (2.10), обзиром да је j^* компактно. Даље, имамо

$$\begin{aligned} \|\nabla b(x) - \nabla b(y)\|_{\frac{1}{2}} &= \|j^*(\nabla H(x) - \nabla H(y))\|_{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\nabla H(x) - \nabla H(y)\|_{L^2} \leq M \|x-y\|_{L^2} \leq M \|x-y\|_{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

одакле добијамо и други део тврђења. ∎

Дакле, доказали смо следећи став.

Став 2.7. Функционал $\mathcal{A}_H : E \to \mathbb{R}$ је C^1-диференцијабилан, и његов градијент дат са

$$\nabla \mathcal{A}_H(x) = x^+ - x^- - \nabla b(x).$$

је Липшицов. ■

Следећа лема нам гарантује глаткост траженог решења које добијамо из минимакс теорије.

Лема 2.2. (Лема регуларности) Претпоставимо да је $x \in E$ критична тачка функционала $\mathcal{A}_H$, тј. $\nabla \mathcal{A}_H(x) = 0$. Тада је она у Ω, тј. глатка петља. Додатно, она задовољава Хамилтонову једначину

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)),\ 0 \leq t \leq 1,$$

те је 1-периодична Хамилтонова орбита.

Доказ. Представимо x и $\nabla H(x)$ њиховим Фуријеовим развојима у L^2 :

$$\begin{aligned} x &= \sum e^{k2\pi Jt} x_k \\ \nabla H(x) &= \sum e^{k2\pi Jt} a_k. \end{aligned} \tag{2.12}$$

По претпоставци, $d\mathcal{A}(x)(v) = 0$. Према томе, из

$$\langle \nabla b(x), v \rangle = \langle j^* \nabla H(x), v \rangle = \langle \nabla H(x), v \rangle_{L^2}$$

добијамо

$$\langle (P^+ - P^-)x, v \rangle = \int_0^1 \langle \nabla H(x), v \rangle dt, \tag{2.13}$$

за све $v \in E$. Бирајући тест функције $v(t) = e^{k2\pi Jt} v$ добијамо

$$2\pi k x_k = a_k, k \in \mathbb{Z}$$

и $a_0 = 0$. Закључујемо да је $\sum |k|^2 |x_k|^2 \leq \sum |a_k|^2$, те је на основу става 2.4 $x \in C$.

Последично, $\nabla H(x(t)) \in C$, и стога

$$\xi(t) = \int_0^t J\nabla H(x(t))dt \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n}).$$

Поређењем Фуријеових коефицијената и користећи 2.13 добијамо $\xi(t) = x(t) - x(0)$, дакле $x \in C^1$, и такође решава једначину $\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$. Десна страна ове једначине је у C^1 те је $x \in C^2$. Итерирајући овај аргумент, обзиром да је $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, закључујемо да је $x \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}) = \Omega$, чиме је доказ леме завршен. ∎

Пажљив избор Хамилтонијана H који је квадратан у бесконачности имплицира у региону великог $|z|$ не постоје периодичне орбите периода 1. Из овог динамичког услова ћемо закључити да функционал $\mathcal{A}_H$ задовољава ПС услов.

Лема 2.3. (ПС услов за $\mathcal{A}_H$) Сваки низ $x_j \in E$ који задовољава $\nabla \mathcal{A}_H(x_j) \to 0$ садржи конвергентан подниз. Специјално, $\mathcal{A}_H$ задовољава ПС услов.

Доказ. Из претпоставке $\nabla \mathcal{A}_H(x_j) \to 0$ закључујемо

$$x_j^+ - x_j^- - \nabla b(x_j) \to 0.$$

Ако је x_j ограничен у E тада је $x_j^0 \in \mathbb{R}^{2n}$ ограничен па има конвергентан подниз. Из компактности ∇b закључујемо да постоји конвергентан подниз од $x_j^+ - x_j^-$, па онда из ортогоналности разлагања $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ коначно добијамо конвергентан подниз од x_j. Да бисмо доказали да је x_j ограничен, претпоставимо супротно, дакле $\|x_j\| \to \infty$. Дефинишимо $y_k = x_k / \|x_k\|$, те је $\|y_k\| = 1$. Добијамо, користећи (2.10),

$$(P^+ - P^-)y_k - j^*(\frac{1}{\|x_k\|}\nabla H(x_k)) \to 0.$$

Обзиром да је $|\nabla H(z)| \leq M|z|$, низ

$$\frac{\nabla H(x_k)}{\|x_k\|} \in L^2$$

је ограничен у L^2. Обзиром да је $j^* : L^2 \to E$ компактан, низ $(P^+ - P^-)y_k$ је релативно компактан, и обзиром да је y_k^0 ограничен, опет имамо подниз $y_k \to y$

који конвергира у L^2, а самим тим и у E. Даље, имамо

$$\left\| \frac{\nabla H(x_k)}{\|x_k\|} - \nabla Q(y) \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{\|x_k\|} \|\nabla H(x_k) - \nabla Q(x_k)\|_{L^2} + \|\nabla Q(y_k - y)\|_{L^2}.$$

Обзиром да, на основу одабира Хамилтонијана H, имамо $|\nabla H(z) - \nabla Q(z)| \leq M$, за све $z \in \mathbb{R}^{2n}$ и ∇Q дефинише непрекидни линеарни оператор на L^2, закључујемо

$$\frac{\nabla H(x_k)}{\|x_k\|} \to \nabla Q(y), \text{ у } L^2.$$

Последично,

$$\frac{\nabla b(x_k)}{\|x_k\|} = j^*(\frac{\nabla H(x_k)}{\|x_k\|}) \to j^*(\nabla Q(y)), \text{ у } E.$$

Ово имплицира да $y \in E$ решење једначине

$$y^+ - y^- - j^* \nabla Q(y) = 0, \|y\| = 1.$$

Слично као у леми 2.2 закључујемо да $y \in C^\infty$ и такође да решава линеарну Хамилтонову једначину

$$\dot{y}(t) = X_Q(y(t)), \; y(0) = y(1).$$

Сада долази на ред Хамилтонова динамика и користимо (први пут) услов (3) Хамилтонијана H. Квадратна форма Q је задата са $Q(z) = (\pi + \varepsilon) q(z)$ и $q(z) = (x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{N^2} \sum_{j=2}^{n} (x_j^2 + y_j^2)$. Стога, линеарни динамички систем $y(t) = X_Q(y(t))$ има решења са периодима линеарних комбинација $\frac{\pi}{\pi+\varepsilon}$ и $N^2 \frac{\pi}{\pi+\varepsilon}$ што опет из услова (3) Хамилтонијана H никако не може бити једнако 1. Дакле, добијено решење y је тривијално, $y(t) = 0$. Међутим, како важи $\|y\| = 1$, добијамо контрадикцију, из које закључујемо да је x_k ограничен. ■

Градијентна једначина $\dot{x} = -\nabla \mathcal{A}_H(x)$, је према ставу 2.7 глобално Липшиц-непрекидна, стога дефинише јединствени *глобални* ток

$$\varphi : R \times E \to E, (t, x) \to \varphi^t(x) = x \cdot t$$

који слика ограничене скупове у ограничене. Све ово је познато из теорије обичних диференцијалних једначина на Хилбертовим просторима. Ток φ^t такође има својство компактности које ће бити од пресудне важности тополошком наставку доказа.

Лема 2.4. Ток $\dot{x} = -\nabla \mathcal{A}_H(x)$ има репрезентацију

$$x \cdot t = e^t x^- + x^0 + e^{-t} x^+ + K(t,x), \tag{2.14}$$

где је $K : \mathbb{R} \times E \to E$ непрекидно компактно пресликавање.

Доказ. Имајући 2.15 у виду, дефинишимо пресликавање K са

$$K(t,x) := -\int_0^1 (e^{t-s}P^- + P^0 + e^{-t+s}P^+)\nabla b(x \cdot s)ds.$$

Докажимо да оно има наведена својства. Нека је $y(t)$ десна страна једначине 2.15. Лако закључујемо да важи

$$\dot{y}(t) = (P^- - P^+)y(t) - \nabla b(x \cdot t).$$

Обзиром да је $y(0) = x$, функција $\xi(t) = y(t) - x \cdot t$ решава линеарну једначину

$$\dot{\xi}(t) = (P^- - P^+)\xi(t), \text{са почетним условом} \xi(0) = 0.$$

Према јединствености Кошијевог решења важи $\xi = 0$, те је $y(t) = x \cdot t$, што је тражено. Остаје да се докаже компактност K. Према 2.10 можемо написати

$$K(t,x) = j^* \Big\{ -\int_0^1 (e^{t-s}P^- + P^0 + e^{-t+s}P^+)\nabla H(j(x \cdot s))ds \Big\}.$$

Ако означимо пресликавање унутар заграда као $k(t,x)$, тада је $k : \mathbb{R} \times E \to L^2$ непрекидно пресликавање и слика ограничене скупове у ограничене, а j^* је компактан оператор, па је $K(t,x)$ као композиција ова два компактно пресликавање. ∎

2.4 Постојање критичне тачке

У последњем поглављу ове главе доказујемо постојање специфичне критичне тачке функционала $\mathcal{A}_H$. Наиме, желимо да докажемо следећу теорему.

Теорема 2.2. Постоји тачка $x^* \in E$ која задовољава

$$\nabla \mathcal{A}_H(x^*) = 0 \qquad \text{и} \qquad \mathcal{A}_H(x^*) > 0.$$

Да бисмо користили минимакс лему 2.1 потребно је пажљиво одабрати фамилију $\mathcal{F}$ подскупова E. Услове 1) и 2) ове леме који су везани за функционал $\mathcal{A}_H$ смо доказали у претходној секцији. На реду је да изаберемо фамилију такву да су испуњени услови 3) и 4) минимакс леме, те да би напослетку минимакс вредност $c(f, \mathcal{F}) > 0$ коју нам даје ова лема управо била критична вредност која се тражи у теореми 2.2. Дефинишимо зато карактеристичне ограничене подскупове $\Sigma_\tau, \Gamma_\alpha \subset E$

$$\Sigma_\tau := \Big\{ x \in E \mid x = x^- + x^0 + se^+, \left\| x^- + x^0 \right\| \leq \tau \text{ и } 0 \leq s \leq \tau \Big\}$$

и

$$\Gamma_\alpha = \{ x \in E^+ \mid \|x\| = \alpha \}.$$

Овде је e^+ елемент из E^+ дефинисан са

$$e^+(t) := e^{2\pi J t} e_1, \text{ где је } e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Дакле имамо $\|e^+\|^2 = 2\pi$ и $\|e^+\|_{L^2} = 1$. Са $\partial\Sigma$ обележавамо границу Σ у простору $E^- + E^0 + \mathbb{R}e^+$. Важе следеће оцене везане за рестрикцију функционала $\mathcal{A}_H$ на дефинисаним подскуповима (за доказе видети [33], глава 3).

Лема 2.5. Постоји $\tau^* > 0$ такво да је за $\tau \geq \tau^*$ $\mathcal{A}_H | \partial\Sigma_\tau \leq 0$ ∎

Лема 2.6. Постоје $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такви да је $\mathcal{A}_H | \Gamma_\alpha \geq \beta > 0$. ∎

У доказу прве леме се користе претпоставке $H \geq 0$ и $H(z) = Q(z), |z| > R$ Хамилтонијана H, док је друга лема последица претпоставке да се H анулира на отвореној околини координатног почетка. Означимо са $\Sigma := \Sigma_\tau$ и $\Gamma := \Gamma_\alpha$ произвољне на које се претходне две леме односе.

Посматрајмо сада шта се дешава са Σ при току φ^t. Познато је да сваки градијентни ток $\dot{x} = -\nabla f(x)$ смањује вредност функционала f. Ово није тешко доказати,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f(\varphi^s(x)) &= df(\varphi^s(x))(\frac{d}{ds}(\varphi^s(x))) \\ &= df(\varphi^s(x))(-\nabla f(\varphi^s(x))) \\ &= -\langle \nabla f(\varphi^s(x)), \nabla f(\varphi^s(x))\rangle.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Према томе,

$$f(\varphi^t(x)) - f(x) = \int_0^t \frac{d}{ds}f(\varphi^s(x))ds = -\int_0^t \|\nabla f(\varphi^s(x))\|^2\, ds.$$

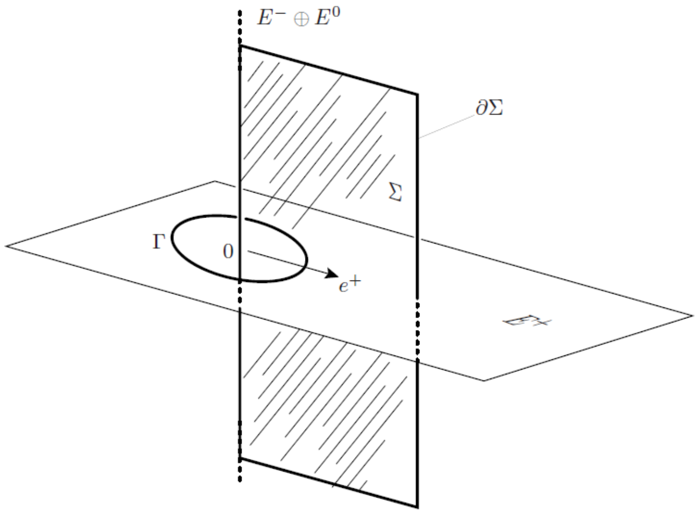
На основу овога и леме 2.5 закључујемо да

$$\mathcal{A}_H|\varphi^t(\partial\Sigma) \leq 0, \text{ за све } t \geq 0.$$

Према леми 2.6, са друге стане важи

$$\mathcal{A}_H|\Gamma > 0,$$

и последично $\varphi^t(\partial\Sigma) \cap \Gamma = \emptyset$, за све $t \geq 0$. Дакле, „оквир” $\varphi^t(\partial\Sigma)$ не прелази преко „круга” Γ током времена. Интуитивно је стога јасно да се „правоугаоник” $\varphi^t(\Sigma)$ мора сећи са Γ за све $t \geq 0$ (Слика 1). Међутим, ово треба доказати.



Слика 1: Истакнути подскупови простора E

Лема 2.7. $\varphi^t(\Sigma) \cap \Gamma \neq \emptyset$, за све $t \geq 0$.

Доказ. Доказ ове леме користи теорију степена, што и не чуди јер је реч о пресецима скупова. Пошто радимо у бесконачно димензионом амбијенту E, користићемо *Лере-Шаудерову теорију степена* која уопштава Брауеров степен пресликавања на бесконачно димензионе просторе и класу непрекидних пресликавања која су облика $Id + K$ где је K компактно, за детаље ове теорије погледати [20].У наставку доказа користимо ознаку $\varphi^t(x) = x \cdot t$. Дакле, наш циљ је доказати $(\Sigma \cdot t) \cap \Gamma \neq \emptyset$, односно да постоји $x \in E$ које задовољава следећи систем:

$$\begin{aligned} (P^- + P^0)(x \cdot t) &= 0 \\ \|x \cdot t\| &= \alpha \\ x &\in \Sigma \end{aligned} \tag{2.16}$$

Према леми 2.4 ток има репрезентацију $x \cdot t = e^t x^- + x^0 + e^{-t} x^+ + K(t, x)$, те се систем претвара у

$$\begin{aligned} 0 &= e^t x^- + x^0 + (P^- + P^0)K(t, x) \\ 0 &= \alpha - \|x \cdot t\| \\ x &\in \Sigma \end{aligned} \tag{2.17}$$

Обзиром да је $x \in \Sigma$ представљен у облику $x = x^- + x^0 + se^+$, са $0 \leq s \leq \tau$, најпре множењем E^- дела са e^{-t} па заменом овај систем постаје еквивалентан са

$$0 = x + B(t, x), \text{ где је } x \in \Sigma, \tag{2.18}$$

при чему је оператор B дефинисан са

$$B(t, x) = (e^{-t} P^- + P^0)K(t, x) + P^+ \Big\{ (\|x \cdot t\| - \alpha)e^+ - x \Big\}.$$

Означивши са $F = E^- \oplus E^0 + \mathbb{R}e^+$, пресликавање $B : \mathbb{R} \times F \to F$ је непрекидно и компактно. Ово је последица леме 2.4. Дакле, можемо применити Лере-Шаудерову теорију степена. На језику ове теорије, једначина (2.18) за дато $t \geq 0$ ће имати решења ако успемо да докажемо да је степен

$$deg(\Sigma, Id + B(t, \cdot), 0) \neq 0.$$

Најпре, приметимо да је тројка $(\Sigma, Id + B(t, \cdot), 0)$ допустива обзиром да једначина (2.18) нема решења за $x \in \partial\Sigma$, илити $0 \notin (Id + B(t, \cdot))(\partial\Sigma)$, због раније установљеног $\varphi^t(\partial\Sigma) \cap \Gamma = \emptyset$. Дакле, можемо говорити о степену $deg(\Sigma, Id + B(t, \cdot), 0)$, за свако $t \geq 0$. Сада, према хомотопској инватијантности степена, важи

$$deg(\Sigma, Id + B(t,\cdot), 0) = deg(\Sigma, Id + B(0,\cdot), 0).$$

Обзиром да је $K(0,x) = 0$, имамо $B(0,x) = P^+\{(\|x\| - \alpha)e^+ - x\}$. Дефинишимо хомотопију:

$$L_\mu(x) = P^+\{(\mu \|x\| - \alpha)e^+ - \mu x\}, \qquad \text{за} \qquad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Приметимо $L_1(\cdot) = B(0,\cdot)$ Да бисмо искористили својство хомотопске инваријантности степена и за ову хомотопију, треба доказати да је $x + L_\mu(x) \neq 0$, за свако $x \in \partial\Sigma$. Претпоставимо зато да за неко $x \in \Sigma$ важи $x + L_\mu(x) = 0$. Тада је $x = se^+$ и $s((1-\mu) + \mu \|e^+\|) = \alpha$. Последично, важи $0 < s \leq \alpha$, тако да је $x \notin \partial\Sigma$ за $\tau > \alpha$. Овакво τ можемо изабрати јер у леми 2.5 стоји услов "за свако $\tau \geq \tau^*$." Користећи хомотопију L_μ сада имамо

$$\begin{aligned} deg(\Sigma, Id + B(0,\cdot), 0) &= deg(\Sigma, Id + L_1(\cdot), 0) \\ &= deg(\Sigma, Id + L_0(\cdot), 0) \\ &= deg(\Sigma, Id - \alpha e^+, 0) \\ &= deg(\Sigma, Id, \alpha e^+) = 1, \end{aligned} \tag{2.19}$$

при чему смо у претпоследњој једнакости користили природност степена, а у последњој нормализацију и чињеницу да $\alpha e^+ \in \Sigma$, за $\tau > \alpha$. ■

Доказавши претходну лему, све је спремно за доказ центалне теореме ове главе.

Доказ теореме 2.2. Дефинишемо фамилију $\mathcal{F} = \{\varphi^t(\Sigma) \mid t \geq 0\}$. На основу претходног, минимакс вредност

$$c := c(\mathcal{A}_H, \mathcal{F}) = \inf_{t \geq 0} \sup_{x \in \varphi^t(\Sigma)} \mathcal{A}_H(x)$$

је реална. Наиме, из $\mathcal{A}_H|\Gamma \geq \beta$, и $\varphi^t(\Sigma) \cap \Gamma \neq \emptyset$ закључујемо

$$\beta \leq \inf_{x \in \Gamma} \mathcal{A}_H(x) \leq \sup_{x \in \varphi^t(\Sigma)} \mathcal{A}_H(x) < \infty,$$

при чему последња неједнакост следи јер је Σ ограничен, те је и $\varphi^t(\Sigma)$, а $\mathcal{A}_H$ слика ограничене скупове у ограничене из Липшицовости $\nabla\mathcal{A}_H$. Стога, како је c инфимум вредности које су у $[\beta, \infty)$, следи да је $c \in \mathbb{R}$. Већ смо доказали да $\mathcal{A}_H : E \to \mathbb{R}$ задовољава ПС услов, као и да градијентна једначина

$\dot{x} = -\mathcal{A}_H(x)$ има глобални ток на E. Напослетку, фамилија $\mathcal{F}$ је по дефиницији позитивно инваријантна. Сада из минимакс леме 2.1 закључујемо да је c критична вредност функционала $\mathcal{A}_H$. Дакле, постоји тачка $x^* \in E$ која задовољава $\nabla \mathcal{A}_H(x^*) = 0$ и и $\mathcal{A}_H(x^*) = c$. То је управо тражена тачка, обзиром да је $c \geq \beta > 0$, те је теорема коначно доказана. ■

На основу свега наведеног, теорема 2.2 има за последицу егзистенцију периодичне орбите коју ћемо користити у нормализацији Хофер-Цендеровог капацитета.

Последица 2.1. (Егзистенција периодичне орбите) Сваки Хамилтонијан $H \in \mathcal{H}$ има периодичну орбиту γ периода 1 која додатно задовољава услов $\mathcal{A}_H(\gamma) > 0$. ■

3 Симплектички капацитети

У овој глави ћемо дати формалну дефиницију симплектичког капацитета и навести нека додатна општа својства капацитета.

3.1 Увод и мотивација

Лиувилова теорема 1.3 сугерише да је запремина једна од инваријанти у симплектичкој геометрији. Међутим, Громов је у свом капиталном раду [27] из 1985. доказао теорему која сугерише да иако је запремина цилиндра бесконачна, то није довољан разлог да се лопта коначне запремине може симплектички убацити у њега. Прецизније, означимо два важна подскупа стандардног симплектичког векторског простора ($\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = dx_1 \wedge dy_i + \cdots + dx_n \wedge dy_n$); лопту полупречника r

$$B^{2n}(r) = \{x \in R^{2n} \mid \|x\| \leq r\},$$

и цилиндар полупречника R, са основом у симплектичкој равни $\langle x_1, y_1 \rangle$

$$Z^{2n}(R) = \{x \in R^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 \leq R\},$$

који су самим тим симплектичке многострукости са рестрикцијом форме ω_0 Тада важи теорема:

Теорема 3.1. (Громовљева*"non-squeezing"* теорема) Лопта $B^{2n}(r)$ се симплектички улаже у цилиндар $Z^{2n}(R)$ акко је $r \leq R$. тј. ако и само ако се тривијално улаже идентичним пресликавањем.

Доказ. За оригинални доказ ове теореме који је врло нетривијалан, Громов је користио теорију псеудохоломорфних кривих коју је изградио у споменутом раду [27], па се ту може наћи и комплетан доказ. За скицу доказа погледати [7]. ■

Пример 3.1. Интересантно је и важно напоменути да се овај феномен јавља само када је база цилиндра симплектички потпростор. Ако нпр. за базу узмемо потпростор $\langle x_1, x_2 \rangle$ који је Лагранжев, нека је $W^{2n}(R) = \{x \in R^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R\}$. Тада за произвољно велико r постоји симплектичко улагање $\phi : B^{2n}(r) \to Z^{2n}(R)$ задато са

$$\phi(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n) \to (\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, ..., x_n, \frac{1}{\varepsilon} y_1, \frac{1}{\varepsilon} y_2, ..., y_n),$$

које за $\varepsilon \leq \frac{R}{r}$ слика лопту $B^{2n}(r)$ у цилиндар $W^{2n}(R)$.

Услов $r \leq R$ из Громовљеве теореме се може записати и $\pi r^2 \leq \pi R^2$, па имајући у виду да је πr^2 површине попречних пресека лопте и цилиндра, добија се идеја о новој симплектичкој инваријанти која мери величину скупа и која ће се понашати као површина. То и има смисла, јер је симплектичка форма 2-форма, те мери некакву врсту површине.

У Римановој геометрији мера величине скупа јесте дијаметар. Он је 1-димензиона величина, у смислу да важи $\mathrm{diam}(\alpha U) = \alpha \cdot \mathrm{diam}(U)$, када је U подскуп $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \geq 0$ реална константа. Општије, ако је (M, g) Риманова многострукост, ово се може исказати са

$$\mathrm{diam}(M, \alpha g) = \alpha \cdot \mathrm{diam}(M, g).$$

Постојање дијаметра је омогућено постојањем растојања $d(x, y)$, које је дефинисано као инфимум дужина кривих између тачака x и y. Дужина криве γ је дефинисана интегралом $l(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$, који нема директни аналогон у симплектичкој геометрији, јер је за антисиметричну форму ω важи $\omega(v, v) = 0$. Међутим, постоји налогон у виду рачунања $\iint_\Sigma \omega$, где је σ комплексна крива у M (у односу на скоро комплексну структуру сагласну са симплектичком формом ω, теорема 1.1). На тај начин Риманова гоеметрија мери Риманове а симплектичка комплексне криве. Такође, постојањем растојања као инваријанте, у Римановој геометрији се изометрије могу класификовати као пресликавања која чувају растојања. Прецизније, важи следећа теорема (видети [38]):

Теорема 3.2. Дифеоморфизам ϕ Риманове многострукости (M, g) је изометрија у смислу $\phi^* g = g$ ако и само ако је изометрија у смислу $\phi^* d = d$ ■

Јачина овог тврђења је у томе што дозвољава да се пређе из услова $\phi^* g = g$ који садржи изводе и самим тим захтева глаткост ϕ, на услов $\phi^* d = d$ који је C^0 природе. Ово нам омогућава да произвољан *хомеоморфизам* зовемо изометријом ако чува растојања, која су C^0 инваријанте.

Са друге стране, у геометрији запремина, тј. геометрији многострукости (M, Ω) где је Ω форма оријентације на M, мера величина произвољног отвореног скупа је запремина $Vol(U) = \int_U \Omega$. Она је $n-$димензиона величина, у смислу $Vol(\alpha U) = \alpha^n Vol(U)$, када је U подскуп $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \geq 0$ реална константа, односно општије,

$$Vol(M, \alpha\Omega) = \alpha Vol(M, \Omega),$$

где је $d = dim(M)$. Слично као у Римановој геометрији, и овде Vol добија јачину C^0 инваријанте пресликавања која чувају запремину , у смислу да важи теорема:

Теорема 3.3. Дифеоморфизам ϕ многострукости (M, Ω) чува запремину у смислу $\phi^*\Omega = \Omega$ ако и само ако чува запремину скупова, $\phi^* Vol = Vol$. ■

На тај начин и овде добијамо могућност дефинисања *хомеоморфизама* који чувају запремину, као хомеоморфизама $\phi : M \to M$ таквих да важи $Vol(\phi(U)) = Vol(U)$.

Напомена: Додајмо и то да је запремина *једина* инваријанта у геометрији запремина. Наиме важи следећа теорема, за доказ видети [19].

Теорема 3.4. (Мозер, Дакороња) Нека су D_1 и D_2 два компактна домена са глатким границама у $\mathbb{R}^m$. Претпоставимо да је $\alpha(x) = a(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ форма запремине на D_1 и $\beta(x) = b(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ форма запремине на D_2. Претпоставимо да постоји дифеоморфизам који чува оријентацију $\psi : D_1 \to D_2$. Ако су запремине ових домена једнаке,

$$\int_{D_1} \alpha = \int_{D_2} \beta,$$

тада постоји дифеоморфизам $\varphi : D_1 \to D_2$ једнак са ψ на граници који чува запремину, $\varphi^*\beta = \alpha$, дакле ови домени су изоморфни у геометрији запремина. ■

Све наведено указује на потребу да се нађе C^0 инваријанта у симплектичкој геометрији која ће класификовати симплектоморфизме на сличан начин као што то класификују растојање и запремина у случају Риманове и геометрије запремина, респективно. Додатно, та инваријанта треба да задовољава услов *монотоности*, односно да мери величину скупа, као и услов *конформности* тј. да је ова инваријанта 2-димензиона, у претходно разматраном смислу. Напослетку, услов јаке нормализације је инспирисан Громовљевом теоремом 3.1.

3.2 Дефиниција и примена на симплектичка улагања

Иако је први пример капацитета дао Громов у свом прослављеном раду [27], симплектичи капацитет је први пут дефинисан у раду [21] Хофера и Екеланда, а од тада је више капацитета пронађено, те је успостављена општија дефиниција у [17], коју овде наводимо:

Дефиниција 3.1. Нека је $Symp^{2n}$ категорија симплектичких многострукости димензије $2n$, са симплектичким улагањима као морфизмима. *Симплектичком категоријом* називамо поткатегорију $\mathscr{C}$ од $Symp^{2n}$ која задовољава импликацију $(M, \omega) \in \mathscr{C} \Rightarrow (M, \alpha\omega) \in \mathscr{C}$, за свако $\alpha > 0$. Користићемо ознаку $\hookrightarrow$ за симплектичка улагања, односно $\to$ за морфизме у категорији $\mathscr{C}$, који су симплектичка улагања, али могу бити рестриктивнији.

Сада, нека је $\mathscr{C} \subset Symp^{2n}$ категорија која садржи лопту $B^{2n} := B^{2n}(1)$ и цилиндар $Z^{2n} := Z^{2n}(1)$.

Дефиниција 3.2. *Симплектички капацитет* на $\mathscr{C}$ је коваријантни фуктор c из $\mathscr{C}$ у категорију $([0, \infty], \leq)$ (са $a \leq b$ као морфизмима) који задовољава услове:

1. **Монотоност:** $c(M, \omega) \leq c(M', \omega')$ ако постоји морфизам $(M, \omega) \to (M', \omega')$
2. **Конформност** $c(M, \alpha\omega) = |\alpha| c(M, \omega)$, за све $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$
3. **Нетривијалност** $0 < c(B^{2n})$ и $c(Z^{2n}) < \infty$.

Први пронађени капацитети су задовољавали услов нормализације, који је јачи услов од тривијалности, међутим неки касније пронађени капацитети нису, те га овде издвајамо као опциони.

Дефиниција 3.3. *(Јако) Нормализовани симплектички капацитет* на $\mathscr{C}$ је капацитет c који осим услова **1-3** задовољава и услов
4*.(Јака) Нормализација $c(B^{2n}) = \pi (= c(Z^{2n}))$.

Основна категорија $\mathscr{C}$ је најпре $Symp^{2n}$, и на њој из услова монотоности тривијално закључујемо да је симплектички капацитет заиста *инваријанта.*

Став 3.1. Сваки симплектички капацитет c на $Symp^{2n}$ је симплектичка инваријанта, односно симплектоморфне многострукости имају једнак капацитет.

Доказ. Ако су многострукости (M, ω) и (M', ω') симплектоморфне, онда је симплектоморфизам између њих улагање у оба смера, те из монотоности важи $c(M, \omega) \leq c(M', \omega')$ и $c(M, \omega) \geq c(M', \omega')$, што даје $c(M, \omega) = c(M', \omega')$. ■

Осим ове категорије од важности је и фамилија Op^{2n} отворених подскупова у $\mathbb{R}^{2n}$. Ову фамилију правимо симплектичком категоријом идентификујући $(U, \alpha^2\omega_0)$ са симплектоморфном $(\alpha U, \omega_0)$. За скуп морфизама ове категорије узимамо симплектичка улагања која су *рестрикције глобалних симплектоморфизама у* $\mathbb{R}^{2n}$. Са овом идентификацијом, аксиома 2. капацитета постаје

2'. Конформност у Op^{2n} $c(\alpha U) = \alpha^2 c(U)$, за $U \in Op^{2n}, \alpha > 0$.

Овај услов је оно што је очекивано, c се понаша као површина, тј. 2-димензиона величина. Нетривијалност за B нам омогућава да капацитети коначних скупова буду строго позитивни, док нетривијалност за Z сугерише да се не ради о запремини нити нечим што је повезано са њом. Јака нормализација је уско повезана са Громовљевом теоремом, и то ћемо објаснити у наставку текста. Приметимо да важи следећи став

Став 3.2. Ако је c капацитет на $Symp^{2n}$ онда је он капацитет и на Op^{2n}.

Доказ. Довољно је приметити да су на категорији Op^{2n} морфизми рестриктивнији него на $Symp^{2n}$. ■

Обрат овог тврђења не важи, што ћемо видети на примеру у следећој глави. Одредимо сада капацитет елипсоида.

Дефиниција 3.4. *Елипсоид* вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ је отворени подскуп стандардног симплектичког простора $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ задат са

$$E(\mathbf{a}) = \{z \in \mathbb{R}^{2n} \mid \frac{x_1^2 + y_1^2}{a_1} + ... + \frac{x_n^2 + y_n^2}{a_n} \leq 1\},$$

при чему $0 < a_1 \leq ... \leq a_n < \infty$.

Пример 3.2. Нека је c произвољни јако нормализовани капацитет на $Symp^{2n}$. Важи $c(E(a_1, a_2, ..., a_n)) = \pi a_1$

Доказ. Елипсоид $E(\mathbf{a})$ се обичном инклузијом симплектички утапа у $Z^{2n}(\sqrt{a_1})$, те је на основу монотоности $c(E(\mathbf{a})) \leq c(Z^{2n}(\sqrt{a_1}) = \pi a_1$. Са друге стране, јасно је да је $B^{2n}(\sqrt{a_1}) \subset E(\mathbf{a})$, те опет из монотоности следи $\pi a_1 = c(B^{2n}(\sqrt{a_1})) \leq c(E(\mathbf{a}))$, из чега добијамо тражени закључак. ■

Из постојања било ког јако нормализованог симплектичког капацитета c на $Symp^{2n}$ имамо независан доказ Громовљеве теореме 3.1. Заиста, из услова јаке нормализације и конформности закључујемо да је $c(Z^{2n}(R)) = \pi R^2$, односно $c(B^{2n}(r)) = \pi r^2$. Према томе, ако постоји улагање $B^{2n}(r) \hookrightarrow Z^{2n}(R)$, из монотоности закључујемо $r \leq R$. Са друге стране ако $r \leq R$ ово улагање тривијално постоји.

Овде смо користили монотоност капацитета као средство опструкције симплектичких улагања. Наведимо још једну овакву примену постојања капацитета c који задовољава (1-4). Уведимо ознаку $B(r) := B^2(r)$.

Став 3.3. Постоји симплектоморфизам $\varphi : B(r_1) \times B(r_2) \to B(s_1) \times B(s_2)$ акко важи $(r_1, r_2) = (s_1, s_2)$.

Доказ. Линеарним симплектоморфизмом можемо заменити r_1 и r_2, те претпоставимо да је $r_1 \leq r_2$. Сада направимо композицију:

$$B^4(r_1) \hookrightarrow B(r_1) \times B(r_2) \xrightarrow{\varphi} B(s_1) \times B(s_2) \hookrightarrow B(s_1) \times \mathbb{R}^2 = Z(s_1),$$

у којој су прво и последње пресликавање инклузије. Сада из монотоности капацитета c добијамо $s_1 \geq r_1$. Истим аргументом са φ^{-1} добијамо обрнуту неједнакост, што даје $s_1 = r_1$. Како је φ симплектичко, оно чува и запремину из теореме Лиувила, те важи $r_1 r_2 = s_1 s_2$, из чега следи тражени закључак. ■

Напомена: Приметимо да би услов једнакости запремине при симплектоморфизму φ дао само $r_1 r_2 = s_1 s_2$, те се капацитет опет појављује као суптилнија инваријанта од запремине. Овај став се може уопштити, али су потребне симплектичке инваријанте које дају више информација од капацитета. Резултат претходног става се може уопштити на производ n дискова у $\mathbb{R}^{2n}$ за $n > 2$, али се не може доказати само помоћу постојања капацитета. Овај резултат је доказан у [16], и као уопштење користи *симплектичку хомологију*, симплектичку инваријанту коју су Флор и Хофер развили у [25].

Приметили смо да постојање јако нормализованог капацитета на $Symp^{2n}$

даје независан доказ Громовљеве теореме 3.1. Међутим, исто нам даје и постојање оваквог капацитета на Op^{2n}.

Став 3.4. Постојање јако нормализованог капацитета на Op^{2n} доказује Громовљеву теорему 3.1.

Доказ. За доказ овог става је кључна лема 1.2. Претпоставимо да постоји улагање $\phi : B^{2n}(r) \to Z^{2n}(R)$. Тада можемо према претходној леми да га рестрикујемо на лопту $\phi : B^{2n}(\delta r)$, где δ може бити произвољан број мањи од 1, тако да ово буде уједно и рестрикција *глобалног* симплектоморфизма на $\mathbb{R}^{2n}$. Међутим, сада из монотоности капацитета на Op^{2n} имамо да је $c(B^{2n}(\delta r)) \leq c(Z^{2n}(R))$, а из нормализације и конформности да је $c(B^{2n}(\delta r)) = \delta^2 r^2$, и $c(Z^{2n}(R)) = R^2$, па то све даје $r \leq \delta R$, за произвољно δ мање од 1, што коначно даје $r \leq R$. Други смер је тривијалан. ■

3.3 Капацитети у димензији 2

Примећено је да се у димензији 2 капацитети веома често поклапају са запремином, тј. површином, те нам не дају нове инваријанте. Наведимо пар резултата на ову тему. Најпре приметимо да је са $c(M, \omega) = \mid \int_M \omega \mid$ добро дефинисан јако нормализовани капацитет *у димензији 2.* Са $\mu(A)$ обележавамо Лебегову меру, тј. површину мерљивог скупа $A \subset \mathbb{R}^2$. Сви резултати овог поглавља су преузети из Зибурговог рада [45], те се ту могу пронаћи и докази следећих ставова.

Став 3.5. Нека је c јако нормализовани симплектички капацитет на $Symp^2$. Ако је $D \subset \mathbb{R}^2$ компактни домен са глатком границом, тада је

$$c(D, \omega_0) = \mu(D).$$

Став 3.6. Претпоставимо да је (M, ω) компактна и повезана симплектичка многострукост, са можда непразном границом, и димензијом 2. Тада за сваки јако нормализовани капацитет на $Symp^{2n}$ важи

$$c(M, \omega) \geq \left| \int_M \omega \right|.$$

Додатно, за Хофер-Цендеров капацитет c_{HZ} важи

$$c_{HZ}(M, \omega) = \left| \int_M \omega \right|,$$

при чему многострукост M не мора бити компактна.

3.4 Регуларност капацитета

У овом поглављу претпостављамо да је c капацитет на $Symp^{2n}$.

Дефиниција 3.5. Капацитету c придружујемо његов *унутрашњи капацитет* $\check{c}$, дефинисан као

$$\check{c} = \sup\{c(U,\omega) \mid U \subset M \text{ је отворен и } \overline{U} \subset M \setminus \partial M\}.$$

Сходно томе имамо још једно додатно својство капацитета, аналогно својствима мере.

Дефиниција 3.6. Кажемо да дати капацитет c на $Symp^{2n}$ има својство *унутрашње регуларности у* M ако важи

$$c(M,\omega) = \check{c}(M,\omega).$$

Општије, кажемо да c има својство унутрашње регуларности ако ово важи за свако $M \in Symp^{2n}$.

Важи следећи став, који оправдава дефиницију 3.5

Став 3.7. За сваки капацитет c, функција $\check{c}$ је капацитет на $Symp^{2n}$ са својством унутрашње регуларности. Такође, ако је d капацитет са својством унутрашње регуларности који задовољава $d \leq c$, тада важи $d \leq \check{c}$.

Доказ. Доказ следи директно из дефиниција и аксиома капацитета. Претпоставимо да је, на пример, d симплектички капацитет који задовољава $d \leq c$ и има унутрашњу регуларност. Тада важи

$$\begin{aligned} d(M) &= \check{d}(M) \\ &= \sup\{d(U) \mid U \subset M \text{ је отворен и } \overline{U} \subset M \setminus \partial M\} \\ &\leq \sup\{c(U) \mid U \subset M \text{ је отворен и } \overline{U} \subset M \setminus \partial M\} \\ &= \check{c}(M). \end{aligned} \tag{3.1}$$

■

Може се говорити и о спољашној регуларности капацитета, посматрајући подскупове једног фиксираног симплектичког амбијента. Узмимо за амбијент $\mathbb{R}^{2n}$ и нека је $\mathcal{O}$ фамилија отворених подскупова $\mathbb{R}^{2n}$.

Дефиниција 3.7. Дефинишимо *спољашњи капацитет* скупа $\Omega \in \mathcal{O}$ као

$$\hat{c}(\Omega) = \inf\{c(U) \mid U \text{ је отворен и } U \supset \bar{\Omega}\}.$$

Слично као малопре имамо дефиницију спољашње регуларности.

Дефиниција 3.8. Кажемо да капацитет има својство *спољашње регуларности* ако важи

$$c(U) = \hat{c}(U),$$

за све $U \in \mathcal{O}$.

4 Примери капацитета

У овој глави ћемо навести неке основне капацитете заједно са њиховим важним својствима.

4.1 Капацитети улагања

Ови капацитети се добијају посматрањем симплектичких улагања $(X, \alpha\Omega) \hookrightarrow (M, \omega)$ са максималним α, или $(M, \omega) \hookrightarrow (X, \alpha\Omega)$ са минималним α, када фиксирамо многострукост (X, ω). Специјално, овде наводимо два најпознатија примера, Громовљев радијус и цилиндрични капацитет.

4.1.1 Громовљев радијус

Дарбуова теорема 1.2 нам даје могућност улагања лопте у околини произвољне тачке p произвољне симплектичке многострукости M. Заиста, ако је ϕ Дарбуова карта из ове теореме, узмимо произвољну лопту са центром у $\phi(p)$ која је садржана у слици ϕ, и инверзно је пресликамо на M. Тиме је за симплектичку многострукост (M, ω) димензије $2n$ добро дефинисана строго позитивна величина

$$c_B(M, \omega) = \sup\{\pi r^2 \mid B^{2n}(r) \hookrightarrow (M, \omega)\}$$

која се зове *Громовљев радијус* од (M, ω). Он мери симплектичку величину (M, ω) на геометријски начин, и подсећа на радијус инјективности Риманове многострукости. Важи следећа теорема.

Теорема 4.1. Громовљев радијус је јако нормализовани симплектички капацитет на $Symp^{2n}$.

Доказ. Монотоност (1) је очигледна, претпоставимо да постоји инклузија $(M, \omega) \overset{\phi}{\hookrightarrow} (M', \omega')$. Онда инклузија $B^{2n}(r) \hookrightarrow (M, \omega)$ индукује инклузију $B^{2n}(r) \hookrightarrow (M', \omega')$ композицијом са ϕ.

Конформност (2) се такође лако доказује. Најпре, имамо да важи $c_B(M, -\omega) = c_B(M, \omega)$, јер имамо симплектоморфизам $\psi : (B^{2n}(r), \omega_0) \to (B^{2n}(r), -\omega_0)$ задат са $\psi(x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n) = (-x_1, .., -x_n, y_1, ..., y_n)$. Сада само треба доказати $c(M, \alpha\omega) = \alpha c(M, \omega)$, када је α позитивно. Стога, ако постоји симплектичка инклузија $B^{2n}(r) \overset{\phi}{\hookrightarrow} (M, \omega)$, онда је и инклузија $(B^{2n}(r), \alpha\omega_0) \overset{\phi}{\hookrightarrow} (M, \alpha\omega)$ симплектичка. Даље, имамо симплектоморфизам $\xi : (B^{2n}(r), \alpha\omega_0) \to (B^{2n}(\sqrt{\alpha} r), \omega_0)$

задат са $\xi(x) = \sqrt{\alpha}x$, тако да све заједно имамо да се симплектичка лопта $B^{2n}(r)$ улаже у (M, ω) акко се $B^{2n}(\sqrt{\alpha}r)$ улаже у $(M, \alpha\omega)$, што нам даје конформност.

Јасно је да је $c_B(B^{2n}) = \pi$, јер се лопта полупречника већег од 1 не може симплектички уложити у B из запреминских разлога. Јака нормализација Громовљевог радијуса, тј. $c_B(Z^{2n}) = \pi$ следи из теореме 3.1, чиме је доказ завршен. ■

Услов јаке нормализације је убедљиво најтежи у претходном доказу и он је, као што смо раније нагласили, еквивалентан Громовљевој теореми. Уз претходну теорему важи и да је Громовљев радијус најмањи симплектички капацитет на $Symp^{2n}$:

Став 4.1. За сваки нормализовани симплектички капацитет c на $Symp^{2n}$ важи $c(M) \geq c_B(M)$.

Доказ. Ако постоји симплектичко улагање $B^{2n}(r) \hookrightarrow (M, \omega)$, важи

$$\pi r^2 = c(B^{2n}(r)) \leq c(M),$$

те кад пустимо супремум по свим оваквим улагањима добијамо тражену неједнакост. ■

4.1.2 Цилиндрични капацитет

Овај капацитет је аналоган Громовљевом радијусу, с тим што уместо улагања максималне лопте у симплектичку многострукост он мери улагање симплектичке многострукости у минимални цилиндар. Прецизније, величину

$$c^Z(M, \omega) = \inf\{\pi R^2 \mid (M, \omega) \hookrightarrow Z^{2n}(R)\}$$

зовемо *цилиндрични капацитет* многострукости (M, ω).

Теорема 4.2. Величина c^Z је јако нормализовани симплектички капацитет на $Symp^{2n}$.

Доказ. Нормализација следи из теореме 3.1, монотоност је тривијална, док конформност следи слично као у доказу теореме 4.1. Само треба констатовати да су $\psi : (Z^{2n}(r), \omega_0) \to (Z^{2n}(r), -\omega_0)$, задат са

$$\psi(x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n) = (-x_1, .., -x_n, y_1, ..., y_n)$$

и $\xi : (Z^{2n}(r), \alpha\omega_0) \to (Z^{2n}(\sqrt{\alpha}r), \omega_0)$ задат са

$$\xi(x) = \sqrt{\alpha}x,$$

симплектоморфизми, што иде директно. ■

Аналогно ставу 4.1 важи следећи став:

Став 4.2. За сваки нормализовани симплектички капацитет c на $Symp^{2n}$ важи $c(M) \leq c^Z(M)$.

Доказ. Ако постоји симплектичко улагање $(M, \omega) \hookrightarrow Z^{2n}(R)$ важи

$$c(M) \leq \pi R^2 = c(Z^{2n}(R)),$$

те кад пустимо инфимум по свим оваквим улагањима добијамо тражену неједнакост. ■

4.2 Капацитети мотивисани Хамилтоновом динамиком

4.2.1 Екеланд-Хоферови капацитети

Иако је Громов у свом раду из 1985. дао први пример капацитета, сам појам капацитета су први увели Хофер и Екеланд у раду [21] из 1989. Они су конструисали јако нормализовани капацитет на Op^{2n} у [21], да би после уопштили ову конструкцију и конструисали фамилију капацитета на Op^{2n} у [22]. Њихова конструкција користи функционал дејства из класичне механике, и овде ћемо је укратко изложити, за детаље погледати наведене радове.

Нека је U ограничени отворени подскуп у $\mathbb{R}^{2n}$. Са $\mathscr{F}(U)$ означимо аутономне Хамилтонијане $H : \mathbb{R}^{2n} \to [0, \infty]$ који додатно задовољавају својства:

(1) $H = 0$ на отвореној околини $\overline{U}$

(2) $H(z) = a|z|^2$, за $|z|$ велико, и $a > \pi, a \notin \mathbb{N}\pi$.

Приметимо да $\mathbb{S}^1$ дејствује на Хилбертовом простору E временским помаком, $\theta \cdot x(t) = x(t + \theta)$, где је $\theta \in \mathbb{S}^1$. Специјална форма $H \in \mathscr{F}(U)$ омогућава да је за свако $k \in \mathbb{N}$ еквиваријантна (у односу на ово дејство) минимакс вредност

$$c_{H,k} := \inf \left\{ \sup_{\gamma \in \xi} \mathcal{A}_H(\gamma) \mid \xi \subset E \text{ је } \mathbb{S}^1 \text{ еквиваријантан и } ind(\xi) \geq k \right\}$$

критична вредност функционала дејства $\mathcal{A}_H$ на E. Овде је $ind(\xi)$ *Фадел-Рабиновицев индекс пресека* (погледати [44] за дефиницију) скупа ξ и S^+ јединичне сфере у E^+.

Дефиниција 4.1. Нека је U отворен подскуп $\mathbb{R}^{2n}$. k-ти *Екеланд-Хоферов капацитет* c_k^{EH} скупа U је

$$c_k^{EH}(U) := \inf\{c_{H,k} \mid H \in \mathscr{F}(U)\},$$

ако је U ограничен, а

$$c_k^{EH}(U) := \sup\{c_k^{EH}(V) \mid V \subset U \text{ ограничен}\},$$

за произвољно U. Важи следећа теорема која оправдава ову дефиницију.

Теорема 4.3. За свако $k \in \mathbb{N}$, c_k^{EH} је симплектички капацитет на категорији Op^{2n}, при чему је $c^{EH} = c_1^{EH}$ још и јако нормализован.

Доказ. За први део тврђења погледати [22] а за други [21]. ∎

Екеланд-Хоферови капацитети реда ≥ 2 нису јако нормализовани. Међутим, познате су њихове вредности на лопти и цилиндру (видети [22] за доказ),

$$c_k^{EH}(B^{2n}) = \left[\frac{k+n-1}{n}\right]\pi \qquad \text{и} \qquad c_k^{EH}(Z^{2n}) = k\pi.$$

Иако компликовано дефинисани, испоставља се да ови капацитети имају једноставну репрезентацију када је граница домена U рестрикованог контактног типа. Дефинишимо *спектар дејства* $\Sigma(U)$ као скуп свих целобројних умножака дејства затворених карактеристика на ∂U,

$$\Sigma(U) := \{k\mathcal{A}(\gamma) \mid k \in \mathbb{Z}, \gamma \text{ је затворена карактеристика на } \partial U\}.$$

Тада важи:

Теорема 4.4. (Екеланд и Хофер) Ако је $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ домен са границом која је хиперповрш рестрикованог контактног типа, тада је $c_k^{EH} \in \Sigma(U)$, за свако $k \in \mathbb{N}$.

Уведимо још један важан подскуп $\mathbb{R}^{2n}$.

Дефиниција 4.2. Нека је $r = (r_1, ..., r_n), 0 < r_1 \leq r_2 ... \leq r_n < +\infty$. *Полидиск вектора* $\mathbf{r}$ је скуп

$$P(\mathbf{r}) := B(r_1) \times B(r_2) \times ... \times B(r_n).$$

Полидиск димензије $2n$ *полупречника* r је скуп $P^{2n}(r) = P(r, r, ..., r)$. Полидиск $P^{2n}(1)$ краће означавамо са P^{2n}.

Екеланд-Хоферови капацитети полидискова су познати, прецизније важи следећи став (за доказ видети [22]):

Став 4.3. $c_k^{EH}(P(r)) = \pi k r_k^2$ ∎

који даје последицу о (не)улагању полидиска у лопту:

Последица 4.1. (Екеланд, Хофер) Ако постоји симплектичко улагање $\psi : P(r) \hookrightarrow B^{2n}(R)$, тада важи

$$\sqrt{n} r_1 \leq R.$$

Доказ. Ако узмемо рестрикцију ψ на $P(\delta r)$ за произвољно $\delta < 1$ можемо је проширити на цело $\mathbb{R}^{2n}$ по леми 1.2, тако да добијемо симплектоморфизам

$\Psi : \mathbb{R}^{2n} \to B^{2n}(R)$ за које важи $\Psi|P(\delta r) = \psi|P(\delta r)$. На основу монотоности капацитета c_n^{EH} важи

$$c_n^{EH}(P(\delta r)) \leq c_n^{EH}(B^{2n}(R)),$$

што уз конформност и вредност капацитета на лопти $c_n^{EH}(B^{2n}) = \pi$ и полидиску $c_n^{EH}(P(\delta r)) = \pi n(\delta r_n)^2$ даје

$$n\delta^2 r_1^2 \leq R^2,$$

те кад пустимо $\delta \to 1$ добијамо тражену неједнакост. ■

Напомена: Приметимо да је услов за улагање који нам даје ова последица, као и у случају Громовљеве теореме, доста рестриктивнији од запреминског. На пример ако узмемо вектор $r = (1, 1, ..., 1)$, онда се он своди на $R \geq \sqrt{n}$, док нам запремине полидиска $Vol(P(1, 1, ..., 1)) = \pi^n$ и лопте $Vol(B^{2n}(R)) = \frac{\pi^n}{n!} R^{2n}$ дају слабији услов $R \geq \sqrt[2n]{n!}$.

Нагласимо да Екеланд-Хоферови капацитети задовољавају споменуто својство, наведено у поглављу 3.1, класификације симплектичких пресликавања. Наиме, у раду [21] Екеланд и Хофер су доказали следећу теорему ($c := c_1^{EH}$)

Теорема 4.5. Нека је $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ C^1-глатко пресликавање такво да за сваки ограничен елипсоид S имамо $c(\varphi(S)) = c(S)$. Тада је оно симплектичко или антисимплектичко. Додатно, ако и $Id \times \varphi : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ чува капацитете елипсоида, онда је φ симплектичко. ■

Додајмо на крају да, према ставу 3.4, постојање капацитета c_1^{EH} даје независан доказ Громовљеве *non-squeezing* теореме.

4.2.2 Хофер-Цендеров капацитет

Овај капацитет је као и претходни такође дефинисан коришћењем Хамилтонове динамике, с тим што је дефиниција једноставнија и односи се на категорију $Symp^{2n}$. Њега су дефинисали Хофер и Цендер у раду [31], а шира прича је приказана у књизи истих аутора [33]. Овај капацитет мери минималну C^0 осцилацију погодно одабраних Хамилтонијана довољну да произведе периодичну орбиту са малим периодом. У том смислу он мери динамичку величину многострукости M. Специјално, за 2-димензионалне многострукости он се поклапа са запремином, тј. површином према [45], а за отворене конвексне домене са глатком границом $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ се представља вредношћу дејства одређене затворене карактеристике на ∂U (погледати [31]).

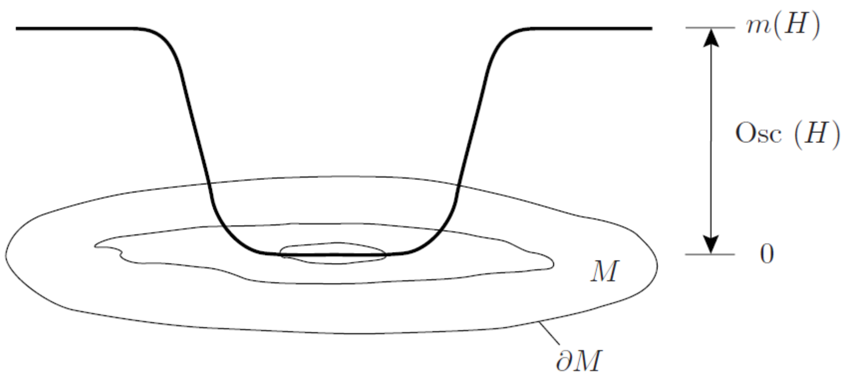
Дефинишимо сада овај капацитет. Нека је (M,ω) симплектичка многострукост са (можда празном) границом ∂M. Дефинишемо скуп $\mathcal{H}(M,\omega)$ аутономних Хамилтонијана $H : M \to \mathbb{R}$ са следећим својствима:

1) Постоји компакт $K \subset M$ и константа $m(H)$, који зависе од H, такви да је $K \subset M \setminus \partial M$ и $H|_{M\setminus K} = m(H)$.

2) Постоји отворен скуп $U \subset M$ (који зависи од H) такав да је $H|_U = 0$.

3) Важи $0 \leq H(x) \leq m(H)$, за све $x \in M$.

Према томе, осцилација овог Хамилтонијана је једнака њеном максимуму $m(H)$. Слика 2 квалитативно описује како изгледају Хамилтонијани из $\mathcal{H}(M,\omega)$.



Слика 2: Изглед Хамилтонијана из $\mathcal{H}(M,\omega)$

Дефиниција 4.3. Хамилтонијан $H \in \mathcal{H}(M,\omega)$ зовемо *допустивим* ако су сва периодична решења Хамилтоновог система $\dot{x} = X_H(x)$ или константна или периодична са периодом $T > 1$. Скуп допустивих Хамилтонијана означавамо са $\mathcal{H}_a(M,\omega) \subset \mathcal{H}(M,\omega)$. *Хофер-Цендеров капацитет* многострукости (M,ω) дефинишемо са

$$c_{HZ}(M,\omega) = \sup\{m(H) \mid H \in \mathcal{H}_a(M,\omega)\}.$$

Дакле, ако је $c_{HZ}(M,\omega) < \infty$, овај број се карактерише на следећи начин. Свака функција H из $\mathcal{H}(M,\omega)$, чија је осцилација $m(H) > c_{HZ}(M,\omega)$, поседује $T-$периодичну Хамилтонову орбиту, за $0 < T < 1$, и $c_{HZ}(M,\omega)$ је најмањи број са овим својством. У 5. глави ћемо доказати важну теорему:

Теорема 4.6. (Хофер, Цендер) Функција c_{HZ} је јако нормализовани симплектички капацитет на категорији $Symp^{2n}$. Штавише, он задовољава својство унутрашње регуларности.

Осим доказа ове теореме, у истој глави ћемо навести неке основне последице постојања Хофер-Цендеровог капацитета, које се везују за постојање периодичних орбита. Ово је и логично јер се оне појављују у дефиницији овог капацитета, па према томе познавање вредности Хофер-Цендеровог капацитета или само његова коначност на некој симплектичкој многострукости већ говори доста о њеној Хамилтоновој динамици.

4.2.3 Енергија раздвајања

Ово је такође пример капацитета на категорији Op^{2n}, и уско је повезан са Хоферовом метриком на симплектичкој многострукости. Први пут је дефинисан у [31] а детаљније је, објашњен у [28] и [33]. Дефинишимо најпре неколико појмова. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост.

Дефиниција 4.4. *Норма Хамилтонијана* $H : M \times I \to \mathbb{R}$ *са компактним носачем је*

$$\|H\| = \int_0^1 Osc(H_t)dt,$$

Помоћу ње дефинишемо *енергију Хамилтоновог дифеоморфизма* са компактним носачем $\phi \in Ham(M, \omega)$ као

$$E(\phi) = \inf\{\|H\| \mid \phi = \phi_H^1\}.$$

Став 4.4. Функција енергије $E : Ham(M, \omega) \to \mathbb{R}$ задовољава следећа својства:

i) $E(\phi) \geq 0$

ii) $E(\phi) = E(\phi^{-1})$

iii) $E(\rho\phi\rho^{-1}) = E(\phi)$

iv) $E(\phi\psi) \leq E(\phi) + E(\psi)$,

за свако $\phi, \psi \in Ham(M, \omega)$ и $\rho \in Symp(M, \omega)$.

Доказ. Погледати [33], глава 5. $\blacksquare$

Дефинишимо сада енергију раздвајања:

Дефиниција 4.5. *Енергија раздвајања* $e(A, M)$ подскупа $A \subset M$ је минимална енергија Хамилтоновог дифеоморфизма који *раздваја* A,

$$e(A, M) := \inf\{E(\phi) | \phi(A) \cap A = \emptyset\},$$

када је A ограничен, а

$$e(A, M) = \sup\{e(K, M) \mid K \subset A, K \text{ је ограничен}\}.$$

Када се зна о којој амбијентној многострукости M је реч, $e(M, A)$ записујемо краће са $e(A)$.

Као што је већ споменуто, овај појам је повезан са Хоферовом метриком, те дефинишимо и њу:

Дефиниција 4.6. *Хоферова метрика* на многострукости (M, ω) је функција $d : Ham(M, \omega) \times Ham(M, \omega) \to \mathbb{R}$ задата са

$$d(\phi, \phi) := E(\phi^{-1}\psi).$$

Како само име сугерише, овиме је добро дефинисана метрика. Из става 4.4 закључујемо да важе сва својства метрике осим недегенерисаности, тј. својства

$$d(\phi, \psi) = 0 \Rightarrow \phi = \psi,$$

које се испоставља да је крајње нетривијално. За доказ овога у стандардном симплектичком простору $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ користимо постојање Хофер-Цендеровог капацитета, и то је уједно једна од примена овог капацитета. Такође ће нам бити потребна тзв. *неједнакост између енергије и капацитета.* Ова неједнакост је доказана у [33], коришћењем постојања специфичних критичних вредности функционала дејства $\mathcal{A}_H$, дакле слично доказу нормализације Хофер-Цендеровог капацитета c_{HZ}.

Теорема 4.7. (Неједнакост између енергије и капацитета) За свако $\psi \in Ham(\mathbb{R}^{2n})$ важи $\sup\{c_{HZ}(U) \mid U \text{ је отворен и } \psi(U) \cap U = \emptyset\} \leq E(\psi)$. $\blacksquare$

Ова теорема, иако нетривијална за доказивање, је заправо веома интуитивна. Наиме, у духу ствараоца симплектичке геометрије Владимира Арнољда, имајући у виду физичку интерпретацију капацитета објекта као неке мере инертности и величине (попут масе), теорема каже да је у покушају да померимо скуп U тако да се не сече са собом потребно уложити енергије бар онолико колики је (Хофер-Цендеров) капацитет тог скупа. Директна последица претходне теореме је неједнакост између два капацитета, а потом и споменута недегерисаност Хоферове метрике.

Последица 4.2. Важи $c_{HZ}(U) \leq e(U)$.

Доказ. Из претходне теореме, за произвољно $\psi \in Ham(\mathbb{R}^{2n})$ које раздваја U важи $E(\psi) \geq c_{HZ}(U)$, те пустимо инфимум по свим таквим ψ. ∎

Последица 4.3. (Недегенерисаност Хоферове метрике) Хоферова метрика на $Ham(\mathbb{R}^{2n})$ је недегенерисана.

Доказ. Довољно је доказати $E(\psi) > 0$, за произвољно $\psi \in Ham(\mathbb{R}^{2n}), \psi \neq Id$. Из $\psi \neq Id$ следи да постоји неко x_0 такво да је $\psi(x_0) \neq x_0$. Дакле, постоји мали диск $B^{2n}(x_0, \varepsilon)$ око x_0 који се раздваја при ψ. На основу теореме 4.7 имамо

$$E(\psi) \geq c_{HZ}(B^{2n}(x_0, \varepsilon)) = c_{HZ}(B^{2n}(\varepsilon)) = \pi\varepsilon^2 > 0,$$

при чему прва једнакост важи јер је транслација симплектоморфизам. ∎

На крају, докажимо да је енергија раздвајања заиста капацитет.

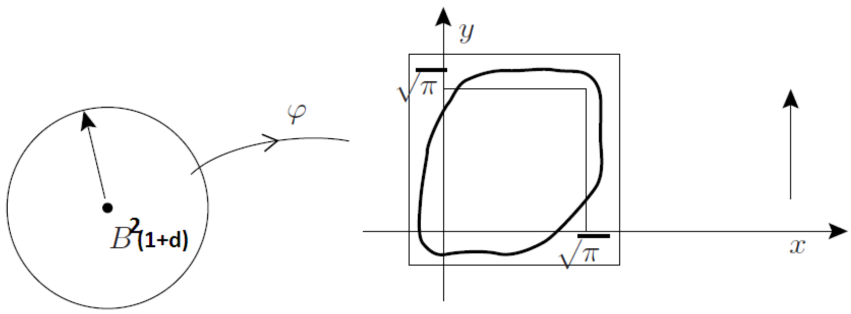
Теорема 4.8. (Хофер, Цендер) Енергија раздвајања $e(\cdot, \mathbb{R}^{2n})$ је јако нормализовани симплектички капацитет на Op^{2n}.

Доказ. Докажимо најпре монотоност. Нека су U и V отворени подскупови у $\mathbb{R}^{2n}$ и нека постоји $\phi \in Symp(\mathbb{R}^{2n})$ такав да је $\phi(U) \subset V$. Најпре приметимо да важи $e(U) = e(\phi(U))$. Ово следи из дефиниције $e(U)$, чињенице да ψ раздваја $\phi(U)$ акко $\phi^{-1}\psi\phi$ раздваја U и (на основу става 4.4) $E(\phi^{-1}\psi\phi) = E(\psi)$. Даље, тривијално важи импликација

$$A \subset B \Rightarrow e(A) \leq e(B),$$

(ако ϕ раздваја B онда раздваја и A, па је инфимум по већем скупу мањи), па заједно са претходним имамо монотоност.

Докажимо својство конформности. Претпоставимо да φ задовољава $\psi^*\omega = \alpha\omega$. Тада је $E(\psi\varphi\psi^{-1}) = |\alpha|E(\varphi)$, за $\varphi \in \mathcal{H}_a(M,\omega)$. Ако је $\varphi(U) \cap U = \emptyset$ тада је и $\psi\varphi\psi^{-1}(\psi(U)) \cap \psi(U) = \emptyset$, одакле следи $e(\psi(U)) = |\alpha|e(U)$.



Слика 3: Улагање диска у квадрат

Напослетку, за нормализацију је довољно доказати да је $e(Z^{2n}) = \pi$, јер онда из монотоности следи $e(B^{2n}) \leq \pi$, а из последице 4.2 да је $e(B^{2n}) \geq c_{HZ}(B^{2n}) = \pi$, те добијамо $e(B^{2n}) = \pi$. С друге стране, имамо $e(Z^{2n}) \geq c_{HZ}(Z^{2n}) = \pi$, тако да је довољно доказати $e(Z^{2n}) \leq \pi$. Из дефиниције енергије раздвајања за неограничене подскупове имамо да је довољно доказати

$$e(B^2 \times B^{2n-2}(R)) \leq \pi,$$

за сваки радијус $R > 1$. Да бисмо раздвојили овај скуп од себе, довољно је раздвојити B^2 од себе, тј. довољно је доказати $e(B^2) \leq \pi$, што значи за свако $\varepsilon > 0$ треба наћи Хамилтонов дифеоморфизам са енергијом $\leq \pi + \varepsilon$ који раздваја B^2. Зато најпре симплектички уложимо $B^2(1+d)$ у отворени квадрат странице $\sqrt{\pi}(1+2d)$. Постојање овог улагања је последица теореме Мозера-Дакороња 3.4. Из њега и из леме 1.2 добијамо симплектоморфизам $\phi \in Symp(R^2)$ који слика B^2 у квадрат странице $\sqrt{\pi}(1+2d)$. Притом, слика лопте $\phi(B^2)$ се раздваја Хамилтоновом транслацијом дуж $y-$осе, на пример добијену аутономним Хамилтонијаном $H_1(x,y) = \sqrt{\pi}(1+2d)x$. Глатким "одсецањем" овог Хамилтонијана можемо одвојити квадрат самог од себе Хамилтонијаном H са нормом $\|H\|$ произвољно блиском π. Тада ток $\varphi^{-1} \circ \varphi^t \circ \varphi$ раздваја $B^2(1)$ самог од себе у времену 1, што доказује $e(B^2) \leq \pi$, те је нормализација испуњена. ■

Приметимо да e није капацитет у смислу поткатегорије $Symp^{2n}$ која садржи отворене подскупове од $\mathbb{R}^{2n}$. Наиме, за $n = 1$, знамо на основу става 3.5 да је сваки јако нормализовани капацитет на $Symp^2$ описан површином за отворене подскупове $\mathbb{R}^2$ са глатком границом. Ако узмемо прстен

$$A(r, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 < x^2 + y^2 < R^2\},$$

важи

$$e(A(R, r)) = e(B^2(R)) = \pi R^2,$$

јер, из тополошких разлога и очувања запремине при симплектоморфизмима, сваки Хамилтонов дифеоморфизам који раздваја прстен од себе раздваја и цели диск. Са друге стране површина прстена је $P(A(r, R)) = \pi(R^2 - r^2)$, дакле различита од $e(A(R, r))$ када је $r > 0$.

4.3 Лагранжев капацитет

Овај капацитет је новијег датума и уведен је у раду [18], користећи идеје ранијих аутора. Његова дефиниција је мотивисана Лагранжевим подмногострукостима $L \subset (M, \omega)$ и дисковима у M чија се граница лепи на L, тј. пресликавањима из $\pi_2(M, L)$. Главни резултат у споменутом раду је теорема:

Теорема 4.9. (Ћилибак, Монке) Нека је $L \subset \mathbb{C}P^n$ затворена Лагранжева подмногострукост која подржава метрику непозитивне кривине. Тада постоји глатко пресликавање $f : (D, \partial D) \to (\mathbb{C}P^n, L)$, са $f^*\omega_{FS} \geq 0$, такво да важи

$$0 < \int_D f^*\omega_{FS} \leq \frac{\pi}{n+1}.$$

Доказ. Видети [18] ■

Лагранжев капацитет је, за разлику од претходних, дефинисан на симплектичкој категорији $Symp_0^{2n}$ симплектичких многострукости димензије $2n$ које су 2-повезане, тј. важи $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$. Морфизми $c(M, \omega) \xrightarrow{i} (M', \omega')$ у овој категорији су симплектичка улагања за која додатно важи услов $\pi_2(M', i(M)) = 0$. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Уведимо следеће појмове:

Дефиниција 4.7. *Спектар* Лагранжеве подмногострукости L од (M, ω) је скуп

$$\Sigma(L) = \left\{ \int_\sigma \omega \mid \sigma \in \pi_2(M, L) \right\}.$$

Минимална симплектичка површина Лагранжеве подмногострукости L од (M, ω) је инфимум позитивног дела спектра,

$$A_{\min}(L, (M, \omega)) := \inf \left\{ \int_\sigma \omega \mid \sigma \in \pi_2(M, L), \int_\sigma \omega > 0 \right\} \in [0, \infty]$$

Ради једноставности записа, $A_{\min}(L, (M, \omega))$ ћемо записивати само са $A_{\min}(L)$, када се зна о којој амбијентној многострукости је реч. Под *Лагранжевим торусом* од (M, ω) подразумевамо Лагранжеву многострукост добијену Лагранжевим улагањем торуса $\mathbb{T}^n \hookrightarrow M$, при чему је $dim(M) = 2n$.

Сада можемо дефинисати Лагранжев капацитет:

Дефиниција 4.8. *Лагранжев капацитет* $c_L(M, \omega)$ 2-повезане симплектичке многострукости (M,ω) се дефинише као

$$c_L(M,\omega) := \sup\{A_{\min}(L) \mid L \subset M \text{ је Лагранжев торус}\}.$$

Пре доказа да је ово заиста капацитет докажимо најпре две леме:

Дефиниција 4.9. *Стандардни торус* полупречника r, у ознаци $\mathbb{T}^n(r)$, је скуп $\mathbb{T}^n(r) = \mathbb{S}^1(r) \times ... \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{2n}$. Торус $\mathbb{T}^n(1)$ означавамо краће са $\mathbb{T}^n$.

Лема 4.1. $\mathbb{T}^n(r)$ је Лагранжева подмогострукост и важи $A_{\min}(\mathbb{T}^n(r)) = \pi r^2$.

Доказ. Стандардни торус је Лагранжева многострукост из става 1.3. Такође, из чињенице да је ω 2-форма и хомотетије

$$H : T^n(1) \to T^n(r), H(x) = rx$$

довољно је доказати да је $A_{\min}(\mathbb{T}^n) = \pi$. Зато, најпре за сваки диск $\sigma \in \pi_2(M,L)$ из Стоксове теореме имамо

$$\int_\sigma \omega = \int_{\partial\sigma} \lambda,$$

јер је $\omega = d\lambda$. Дакле спектар $\Sigma(\mathbb{T}^n)$ се састоји од елемената $\langle\lambda,\gamma\rangle$, где је $\gamma \in H_1(\mathbb{T}^n)$. Ово нам говори да уочимо прву хомологију торуса

$$H_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}\langle\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\rangle$$

са генераторима $\alpha_k(t) = (1, ..., e^{it}, ..., 1)$. Свака од ових кружница је обод диска $D_k = 1 \times ... \times B(1) \times ... \times 1$, који има симплектичку површину π, те је опет из Стоксове теореме $\langle\lambda,\alpha_k\rangle = \pi$. По линеарности, за произвољно $\gamma \in H_1(\mathbb{T}^n), \gamma = \sum n_k\alpha_k$, важило би

$$\langle\lambda,\gamma\rangle = \sum n_k\langle\lambda, a_k\rangle = \pi\sum n_k,$$

па је $A_{\min}(\mathbb{T}^n)$, као најмањи позитиван елемент бројева овог типа, једнак π, што је и требало доказати. ■

Дефиниција 4.10. Лагранжеву подмногострукост $L \subset M$ чији је спектар дискретан, $\Sigma(L) = \mathbb{Z} \cdot A_{\min}(L)$, зовемо *рационалном.*

Лема 4.2. Нека је L произвољна Лагранжева подмногострукост у (M, ω). Тада је или $A_{\min}(L)$ нула или је L рационална.

Доказ. У ([6], глава 1) се може наћи корисно тврђење из Абелових група, у виду задатка.

Тврђење. Нека је $H \subset G$ нетривијална подгрупа тотално уређене Архимедске Абелове групе G и $H_+ := \{x \in H \mid x > 0\}$. Скуп H је густ у G акко је $\inf H_+ = 0$. Скуп H није густ у G акко H_+ има минимум.

Специјално, $\mathbb{R}$ је Архимедска Абелова група, и спектар $\Sigma(L)$ је њена подгрупа. Ако $A_{\min}(L) = \inf(\Sigma(L)_+)$ није нула, тада на основу овог тврђења важи да $\Sigma(L)_+$ има минимум. Означимо га са a. Тада је $\Sigma(L) = \mathbb{Z}\langle a \rangle$. Заиста, ако претпоставимо супротно, имамо да постоји елемент $b \in \Sigma(L)$ за који важи $ka < b < (k+1)a$. Међутим, елемент $b - ka$ такође припада спектру и мањи је од a што је немогуће. ■

За рационалне Лагранжеве подмногострукости, коришћењем Флорове хомологије, Чеканов је у споменутом раду доказао важну теорему, из које следи неједнакост између Лагранжевог капацитета и енергије раздвајања:

Теорема 4.10. (Чеканов) Ако је $L \subset M$ рационална Лагранжева подмногострукост, и $\phi \subset Ham(M)$ Хамилтонов дифеоморфизам са енергијом $E(\phi) < A_{\min}(L)$. Тада је индекс пресека $\#(L \cap \phi(L)) \geq dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$ под условом да је овај пресек трансверзалан. ■

Последица 4.4. $A_{\min}(L) \leq e(L)$ за сваку затворену Лагранжеву подмногострукост у $\mathbb{R}^{2n}$. Одавде следи $c_L(U) \leq e(U)$, за сваки отворен подскуп $U \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Доказ. Други део теореме следи из првог и монотоности енергије раздвајања. Докажимо сада први део тврђења. Ако је $A_{\min}(L) = 0$, тривијално важи. Према леми 4.2, у супротном је L рационална. Тада, ако произвољан $\phi \in Ham(\mathbb{R}^{2n})$ раздваја L, онда је индекс пресека из теореме Чеканова једнак нули. Стога, из исте теореме следи да је

$$E(\phi) \geq A_{\min}(L).$$

Када пустимо инфимум по свим Хамилтоновим дифеоморфизмима ϕ који раздвајају L добијамо $e(L) \geq A_{\min}(L)$. ■

Сада докажимо да је c_L заиста капацитет:

Теорема 4.11. (Ћилибак, Монке) $c_L(M,\omega)$ је симплектички капацитет на категорији $Symp_0^{2n}$.

Доказ. Докажимо најпре монотоност. Нека је $(M,\omega) \xrightarrow{i} (M',\omega')$ симплектичко улагање са условом $\pi_2(M', i(M)) = 0$, и нека је L Лагранжев торус у M. Тада је $L' = i(L)$ Лагранжев торус у M', те је добро дефинисана величина $A_{\min}(L')$. Уочимо дуги тачни низ тројке $(M', i(M), L')$ у хомотопији:

$$... \to \pi_2(i(M), L') \xrightarrow{j_*} \pi_2(M', L') \to \pi_2(M', i(M)) \to ...$$

где је $j : (i(M), L') \to (M', L')$ инклузија. Како је последњи члан једнак нули, из тачности низа закључујемо да је j_* НА. Према томе, ако је $\sigma' \in \pi_2(M', L')$ произвољан, постоји елемент $\sigma \in \pi_2(i(M), L')$ такав да је $j_*\sigma = \sigma'$. Такође, како је $i : (M, L) \to (i(M), L')$ дифеоморфизам, постоји $\overline{\sigma} \in \pi_2(M, L)$ такав да је $i_*\overline{\sigma} = \sigma$. Тада важи

$$\int_{\sigma'} \omega' = \langle \omega', \sigma' \rangle = \langle \omega', j_*\sigma \rangle = \langle j^*\omega', \sigma \rangle = \langle i^* j^* \omega', \overline{\sigma} \rangle = \langle \omega, \overline{\sigma} \rangle = \int_{\overline{\sigma}} \omega.$$

Према томе, имамо да је

$$\begin{aligned} A_{\min}(L) &= \inf \left\{ \int_\sigma \omega \mid \sigma \in \pi_2(M, L), \int_\sigma \omega > 0 \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \int_\sigma \omega \mid \sigma \in \pi_2(M', L'), \int_\sigma \omega > 0 \right\} = A_{\min}(L'), \end{aligned} \tag{4.1}$$

јер већи скуп има мањи инфимум. Самим тим важи $A_{\min}(L) \leq c_L(M')$, а и $c_L(M) \leq c_L(M')$, као супремум.

Својство конформности се лако доказује. Најпре, важи $A_{\min}(L, (M, -\omega)) = A_{\min}(L, (M, \omega))$, обзиром да је скуп вредности $\{\int_\sigma \omega \mid \sigma \in \pi_2(M, L)\}$ симетричан у односу на 0, јер је $\int_{-\sigma} \omega = -\int_\sigma \omega$. Даље, за позитивно α јасно је да важи $A_{\min}(L, (M, \alpha\omega)) = \alpha A_{\min}(L, (M, \omega))$, јер α пролази кроз интеграл као и инфимум. Закључујемо да $A_{\min}(L, (M, \alpha\omega)) = |\alpha| A_{\min}(L, (M, \omega))$ важи за произвољно $\alpha \neq 0$. Како је c_L дефинисан као супремум по $A_{\min}(L)$, важи $c_L(M, \alpha\omega)) = |\alpha| c_L(M, \omega))$, а то је управо услов конформности.

Нетривијалност за лопту B^{2n} следи из улагања $\mathbb{T}^n(r)$ у лопту B^{2n}, за $r < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Притом, из леме 4.1 закључујемо да је $c_L(B^{2n}) \geq A_{\min}(\mathbb{T}^n(r)) = \pi r^2 > 0$. За нетривијалност цилиндра према последици 4.4 имамо $c_L(Z^{2n}) \leq e(Z^{2n}) = \pi < \infty$. ∎

Овај капацитет нема својство нормализације, али су у споменутом раду [18] израчунате његове вредности на јединичној лопти и цилиндру:

Став 4.5. Важи $c_L(B^{2n}) = \frac{\pi}{n}$ и $c_L(Z^{2n}) = \pi$.

Доказ. Из доказа претходне теореме закључујемо да је $c_L(Z^{2n}) \leq \pi$. Међутим, за свако $\delta < 1$ торус $\mathbb{T}^n(\delta)$ се улаже у Z^{2n} те је $c_L(Z^{2n}) \geq A_{\min}(\mathbb{T}^n(\delta)) = \pi\delta^2$. Кад пустимо да δ тежи 1 добијамо $c_L(Z^{2n}) \geq \pi$, па самим тим и $c_L(Z^{2n}) = \pi$.

Слично из доказа претходне теореме имамо да се $\mathbb{T}^n(r)$ улаже у B^{2n} за свако $r < \frac{1}{\sqrt{n}}$, па закључујемо да је $c_L(B^{2n}) \geq \frac{\pi}{n}$. Претпоставимо да је $c_L(B^{2n}) > \frac{\pi}{n}$. То значи да постоји Лагранжев торус L такав да је $A_{\min}(L) > \frac{\pi}{n}$. Скалирањем са $0 < \alpha < 1$ можемо добити $A_{\min}(\alpha L) = \frac{\pi}{n}$, те можемо претпоставити да важи $A_{\min}(L) = \frac{\pi}{n}$. Сада, према ставу 1.4 постоји симплектоморфизам ϕ

$$B^{2n} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n,$$

тако да се притом L слика у Лагранжев торус L'. Докажимо да сваки диск $s \in \pi_2(\mathbb{C}P^n, L')$ има симплектичку површину $\int_s \omega_{FS} = k\frac{\pi}{n}$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Заиста, ако је s диск у $\mathbb{C}^n$, онда је његова симплектичка површина једнака целобројном умношку $\frac{\pi}{n}$, због симплектоморфизма ϕ и леме 4.2 (пошто је $A_{\min}(L) \neq 0$). У супротном, можемо залепити на границу s диск који се налази у $\mathbb{C}^n$, и тиме добити сферу у $\mathbb{C}P^n$. Међутим, свака сфера у $\mathbb{C}P^n$ има симплектичку површину једнаку целобројном умношку π, јер је Фубини-Штудијева форма ω_{FS} дефинисана тако да важи $\langle \omega_{FS}, \mathbb{C}P^1 >= \pi$, при чему је $\mathbb{C}P^1$ генератор $H_2(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$. Закључујемо да је симплектичка површина s и у овом случају једнака целобројном умношку $\frac{\pi}{n}$, јер је разлика таквих. Међутим, ово се коси са теоремом 4.9 која нам гарантује постојање бар једног диска у $s \in \pi_2(\mathbb{C}P^n, L')$ са симплектичком површином $\leq \frac{\pi}{n+1}$. Притом је услов непозитивности кривине за L' из теореме испуњен, јер је L' дифеоморфно торусу $\mathbb{T}^n$ који подржава равну, а самим тим и непозитивну метрику $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Ова контрадикција нам даје $c_L(B^{2n}) = \frac{\pi}{n}$, чиме је доказ завршен. ∎

Приметимо да се помоћу добијених вредности капацитета лако може израчунати и капацитет полидиска.

Став 4.6. $c_L(P^{2n}(r)) = \pi r^2$.

Доказ. Како се $P^{2n}(r)$ симплектички улаже идентитетом у $Z^{2n}(r)$, и притом важи услов $\pi_2(Z^{2n}(r), P^{2n}(r)) = 0$, из дугог тачног низа пара у хомотопији, монотоност и конформност дају $c_L(P^{2n}(r)) \leq \pi r^2$. Са друге стране, полидиск $P^{2n}(r)$ садржи торус $\mathbb{T}^n(\delta r)$, за свако $\delta < 1$, па је $c_L(P^{2n}(r)) \geq A_{\min}(\mathbb{T}^n(\delta r))$. Сада из леме 4.1 и супремумом по δ добијамо $c_L(P^{2n}(r)) \geq \pi r^2$, што заједно са претходним даје $c_L(P^{2n}(r)) = \pi r^2$. ■

Као што смо и раније споменули, информације о капацитетима нам због својства монотоности дају услове о (не)улагању, тако да је овим опет доказана последица 4.1 о симплектичком (не)улагању полидиска у диск:

Последица 4.5. Полидиск $P^{2n}(r)$ се симплектички улаже у јединичну лопту B^{2n} акко је $r \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Доказ. При симплектичком улагању i полидиска у јединичну лопту је услов $\pi_2(B^{2n}, i(P^{2n}(r))) = 0$ испуњен, због тачног низа пара и контрактибилности ова два простора. Стога, из монотоности капацитета c_L добијамо тражени услов. Други смер је тривијалан. ■

Додајмо на крају хипотезу о капацитету елипсоида, која уопштава став 4.5.

Хипотеза 4.1. Лагранжев капацитет елипсоида $E(\mathbf{a})$, при чему је $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, је дат са

$$c_L(E(\mathbf{a})) = \frac{\pi}{1/a_1 + ... + 1/a_n}.$$

5 Хофер-Цендеров капацитет - шира перспектива

Последњу главу овог рада посвећујемо Хофер-Цендеровом капацитету. Најпре доказујемо да је он заиста јако нормализовани капацитет на $Symp^{2n}$, пратећи доказ из [33], а потом дајемо његове примене, у виду резултата на тему Вајнштајнове хипотезе, једне од главних хипотеза у симплектичкој топологији. Сви наведени резултати захтевају услов коначности Хофер-Цендеровог капацитета на датој симплектичкој многострукости, те се тим условом подробније бавимо у последњем поглављу.

5.1 Доказ својстава капацитета

Докажимо најпре својства монотоности, конформности као и унутрашње регуларности.

Став 5.1. Величина c_{HZ} има својство монотоности.

Доказ. Нека је $\varphi : (M, \omega) \hookrightarrow (N, \Omega)$ улагање. Тада можемо дефинисати пресликавање $\varphi_* : \mathcal{H}(M, \omega) \to \mathcal{H}(N, \Omega)$ на следећи начин:

$$\varphi_*(H) = \begin{cases} H \circ \varphi^{-1}(x), & \text{за } x \in \varphi(M) \\ \\ m(H), & \text{за } x \notin \varphi(M). \end{cases}$$

Лако закључујемо да φ_* заиста слика $\mathcal{H}(M, \omega)$ у $\mathcal{H}(N, \Omega)$. Такође, приметимо да такође важи $\varphi_*(\mathcal{H}_a(M, \omega)) \subset \mathcal{H}_a(N, \Omega)$. Заиста, обзиром да за симплектичко φ (на основу става 1.7) важи $\varphi^*(X_H) = X_{\varphi_*(H)}$ на $\varphi(M)$, неконстантна периодична решења, заједно са периодима, ових Хамилтонових токова се чувају овом коресподенцијом. Сада $c(M, \omega) \leq c(N, \Omega)$ следи из чињенице да је супремум монотон у односу на инклузију скупова. ■

Став 5.2. Величина c_{HZ} има својство конформности.

Доказ. Претпоставимо да је $\alpha \neq 0$ и дефинишимо очигледну бијекцију ψ : $\mathcal{H}(M, \omega) \to \mathcal{H}(M, \alpha\omega)$ са $\psi : H \to |\alpha|H = H_\alpha$. Јасно је $m(H_\alpha) = |\alpha| m(H)$ тако да лема следи ако докажемо да је ψ такође бијекција између $\mathcal{H}_a(M,\omega)$ и $\mathcal{H}_a(M,\alpha\omega)$. Из дефиниције Хамилтоновог векторског поља имамо

$$(\alpha\omega)(X_{H_\alpha},\cdot) = -dH_\alpha = -|\alpha|dH = |\alpha|\omega(X_H,\cdot)$$

и затим из недегенерисаности ω и $\frac{\alpha}{|\alpha|}X_{H_\alpha} = X_H$. Дакле важи $X_{H_\alpha} = \pm X_H$, и у оба случаја ова два векторска поља имају иста периодична решења са истим периодима. ■

Став 5.3. Величина c_{HZ} има својство унутрашње регуларности, $c_{HZ} = \check{c}_{HZ}$.

Доказ. Ово следи директно из дефиниција. Разматрамо само случај $c_{HZ}(M,\omega) < \infty$, случај $c_{HZ}(M,\omega) = \infty$ се разматра аналогно. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји $H \in \mathcal{H}_a(M,\omega)$ са $m(H) > c_{HZ}(M,\omega) - \varepsilon$. Нека је $K = supp(X_H)$. Тада постоји отворени скуп U такав да је $K \subset U \subset \overline{U} \subset M \setminus \partial M$. Јасно је да је $H \in \mathcal{H}_a(U,\omega)$, те је стога $c_{HZ}(U,\omega) \geq c_{HZ}(M,\omega) - \varepsilon$. Како ово важи за свако $\varepsilon > 0$ закључујемо да је $c_{HZ}(M,\omega) = \sup\{c_{HZ}(U,\omega) \mid U \subset M$ је отворен и $\overline{U} \subset M \setminus \partial M\}$. ■

Оценимо сада капацитет одоздо на јединичној лопти B^{2n} експлицитним конструисањем Хамилтонијана са осцилацијом $\pi - \varepsilon$, за произвољно мало $\varepsilon > 0$.

Став 5.4. $c_{HZ}(B^{2n},\omega_0) \geq \pi$.

Доказ. Изаберимо $0 < \varepsilon < \pi$. Конструисаћемо функцију $H \in \mathcal{H}_a(B^{2n})$ такву да је $m(H) = \pi - \varepsilon$, доказујући $c_{HZ}(B^{2n},\omega_0) \geq \pi - \varepsilon$, што када пустимо да ε тежи нули даје тражену оцену. Нека је $f : [0,1] \to [0,\infty]$ функција која задовољава (видети слику 4)

1) $0 \leq f'(t) < \pi$

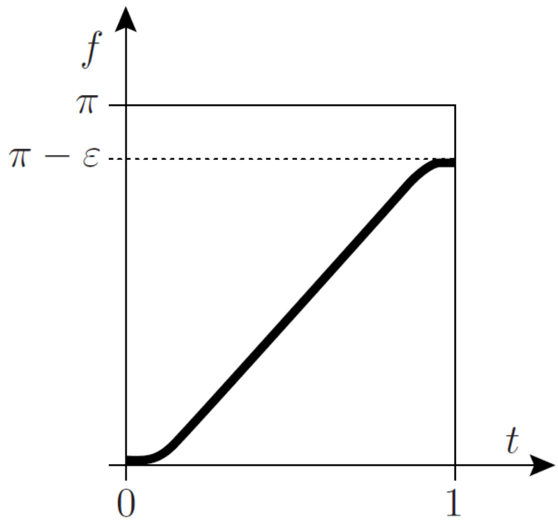
2) $f(t) = 0$, за t близу 0

3) $f(t) = \pi - \varepsilon$, за t близу 1.

Сада дефинишемо Хамилтонијан радијално, $H(x) = f(|x|^2)$. Тада је $m(H) = \pi - \varepsilon$. Тврдимо да је $H \in \mathcal{H}_a(B^{2n},\omega_0)$. Заиста, Хамилтонова једначина (1.3) за овај систем је

$$-J\dot{x} = \nabla H(x) = 2f'(|x|^2)x,$$

и има функцију $n(x) = |x|^2$ за интеграл. Ово важи јер је H интеграл увек, и из $H = f \circ n$. Дакле, ако је $x(t)$ решење, тада је $2f'(|x|^2) = a$ константно и решење



Слика 4: График функције f

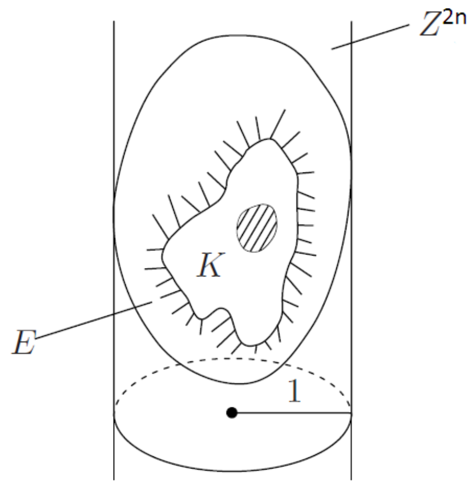
задовољава $-J\dot{x} = ax$. Закључујемо да су сва решења периодична и дата са $x(t) = e^{aJt}x(0)$. Ако је $a = 0$ решење је константно, док је за $a > 0$ период дат са $T = \frac{2\pi}{a} > 1$, обзиром да је по особини 1) функције f $0 \leq a < 2\pi$. Дакле H је допустив Хамилтонијан, што смо и хтели да докажемо. ■

Да бисмо доказали да је c_{HZ} јако нормализован довољно је још доказати да је $c_{HZ}(Z^{2n}, \omega_0) \leq \pi$, јер из монотоности и из претходног става имамо $c_{HZ}(Z^{2n}, \omega_0) \geq c_{HZ}(B^{2n}, \omega_0) \geq \pi$. Ово је убедљиво најтежи део доказа, и захтева доказивање екзистенције Хамилтонове орбите. Дакле, наш следећи корак је доказати

Теорема 5.1. (Егзистенција периодичне орбите на цилиндру) Ако је $H \in \mathcal{H}(Z^{2n})$ и задовољава $m(H) > \pi$, тада Хамилтонов систем $\dot{x} = J\nabla H(x)$ на цилиндру Z^{2n} поседује неконстантну периодичну орбиту са периодом $T = 1$.

Доказ. Приметимо најпре да можемо претпоставити да се Хамилтонијан анулира у околини координатног почетка. Заиста, на основу дефиниције $\mathcal{H}(Z^{2n})$ знамо да постоји отворени подскуп U на коме се H анулира. Са друге стране, можемо H заменити $H \circ \psi$ где је ψ симплектички дифеоморфизам цилиндра Z^{2n} са компактним носачем, обзиром да су њихови токови коњуговани, па самим тим чувају решења заједно са периодима. Зато конструишимо повољан ψ. Изаберимо $z_0 \in U$ произвољно, и глатку функцију $\rho : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ са компактним носачем која је једнака 1 на околини V дужи $[0, z_0]$. Дефинишимо Хамилтонијан $K : Z^{2n} \to \mathbb{R}$ са $K(z) = \rho(z)\langle z, -Jz_0\rangle$. Тада је дифеоморфизам $\psi = \psi_K^1$ у времену $t = 1$ Хамилтоновог тока од K Хамилтонов дифеоморфизам са компактним носачем. Како је $X_K(z) = z_0$ за $z \in V$, линија $\psi^t(0) = tz_0$ је решење које у времену $0 \leq t \leq 1$ помера 0 у z_0. Дакле $\psi(0) = z_0$, те је $H \circ \psi$ Хамилтонијан који се анулира у околини координатног почетка, што смо и хтели.

Даље, желимо да проширимо H са цилиндра Z^{2n} на цео простор $\mathbb{R}^{2n}$. Ово можемо извести тривијално, обзиром да је H константан у околини границе цилиндра. Међутим, у духу даљег доказа, циљ нам је да добијени $\overline{H} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ буде *квадратан у бесконачности,* тј. да за $|z| > R, z \in \mathbb{R}^{2n}$ буде једнак квадратној форми. Оваква врста Хамилтонијана се често среће у симплектичкој топологији због њихових погодних својстава, од којих ћемо неке видети у наставку доказа.



Слика 5: Елипсоид E унутар цилиндра Z^{2n}

Најпре, обзиром да је $H \in \mathcal{H}(Z^{2n}, \omega_0)$ закључујемо да за довољно велико $N \in \mathbb{N}$ постоји елипсоид $E = E_N$ унутар цилиндра Z^{2n} (слика 5), такав да је $H \in \mathcal{H}(E, \omega_0)$, где је

$$E_N = \left\{ z \in \mathbb{R}^{2n} \mid q(z) = x_1^2 + y_1^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{j=2}^{n} (x_j^2 + y_j^2) < 1 \right\},$$

а $z = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ координате на $\mathbb{R}^{2n}$.

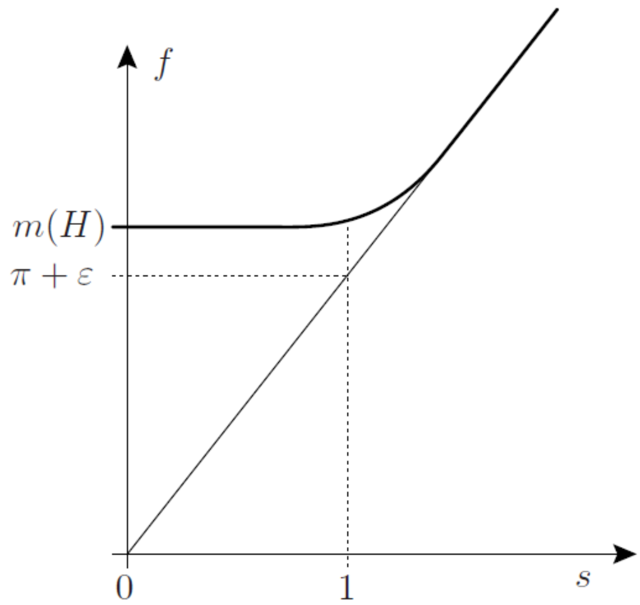
Обзиром да $H \in \mathcal{H}(Z^{2n}, \omega_0)$ задовољава $m(H) > \pi$, постоји $\pi > \varepsilon > 0$ такво да је $m(H) > \pi + \varepsilon$. Дакле, можемо изабрати глатку функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такву да је (слика 6):

1) $f(s) = m(H)$, за $s \leq 1$

2) $f(s) \geq (\pi + \varepsilon)s$, за све $s \in \mathbb{R}$

3) $f(s) = (\pi + \varepsilon)s$, за s велико

4) $0 < f'(s) \leq \pi + \varepsilon$, за $s > 1$.



Слика 6: График функције f

Сада екстензију H на $\mathbb{R}^{2n}$ дефинишемо са

$$\overline{H}(z) = \begin{cases} H(z), & \text{за } z \in E \\ f(q(z)), & \text{за } z \notin E. \end{cases}$$

Јасно је да добијена функција $\overline{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ и квадратна у бесконачности,

$$\overline{H}(z) = (\pi + \varepsilon)q(z), \text{ за } |z| \geq R,$$

за неко велико R. Дакле, проширили смо почетни Хамилтонијан на цео простор R^{2n}. Међутим, у потрази за периодичним решењем почетног Хамилтоновог система, треба нам повољан филтер за решења новодобијеног система Хамилтонијана $\overline{H}$ на R^{2n}. Такав нам даје следећи став.

Став 5.5. Претпоставимо да је $x(t)$ периодично решење једначине $\dot{x} = X_{\overline{H}}(x)$ са периодом 1. Ако оно задовољава

$$\mathcal{A}_{\overline{H}}(x) = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}\langle -J\dot{x}, x\rangle - \overline{H}(x(t))\Big] dt > 0$$

тада је $x(t)$ неконстантно и $x(t) \subset E$.

Доказ. Ако је $x(t) = x_0$ константно решење, $\mathcal{A}_H(x(t)) \leq 0$, обзиром да је $\overline{H} \geq 0$. Хамилтоново векторско поље $X_{\overline{H}}$ се анулира на ∂E. Дакле, ако за неко решење $x(t_0) \notin E$ за неко t_0, онда је $x(t) \notin E$, за свако $t \in \mathbb{R}$. Даље, $x(t)$ је решење једначине

$$-J\dot{x} = \nabla\overline{H}(x) = f'(q(x))\nabla q(x).$$

Приметимо такође да је ван E функција q интеграл овог система јер је директно повезана са $\overline{H}$ који је интеграл. Према томе, ако је $x(t)$ решење онда је

$$q(x(t)) = q(x(t_0)) = \tau.$$

Користећи идентитет $\langle\nabla q(z), z\rangle = 2q(z), \forall z \in \mathbb{R}^{2n}$ који важи за сваку квадратну форму и који се доказује директно, добијамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_H(x) &= \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}\langle -J\dot{x}, x\rangle - \overline{H}(x(t))\Big] dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} f'(\tau)\langle\nabla q(x), x\rangle - \int_0^1 f(q(x))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f'(\tau)2q(x(t)) - f(\tau) \\
&= f'(\tau)\tau - f(\tau).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

По дефиницији f, ово је мање од $(\pi+\varepsilon)\tau - (\pi+\varepsilon)\tau = 0$. Дакле, $\mathcal{A}_H(x) \leq 0$ за сва решења ван E, те је тиме став доказан. ■

Дакле, наш следећи циљ је да нађемо 1-периодично решење система

$$\dot{x} = X_{\overline{H}}(x),\ \mathcal{A}_H(x) > 0. \tag{5.2}$$

Сада долази до изражаја теорија развијена у глави 2, јер је $\overline{H} \in \mathcal{H}$ баш онаквог облика Хамилтонијана за које та теорија важи. На основу последице 2.1 закључујемо да решење система (5.2) постоји, те је овим коначно доказана теорема. $\blacksquare$

Доказом претходне теореме коначно је доказано да је c_{HZ} јако нормализовани капацитет. Приметимо да је главну и најтежу улогу у доказу одиграла последица 2.1 из главе 2, која је произашла из радова [42][43] П. Рабиновица о периодичним орбитама специјалних Хамилтонових система.

5.2 Примене Хофер-Цендеровог капацитета. Вајнштајнова хипотеза

Постојање периодичне орбите у Хамилтоновом систему је од важности у класичној механици. Самим тим, ово питање је интересантно испитивати у произвољној симплектичкој многострукости (M, ω) са Хамилтонијаном H. Притом, како Хамилтонов ток чува вредност Хамилтонијана H, ако постоји периодицна орбита $\gamma(t)$, за њу ће важити $H(\gamma(t)) = const = c$, те се крива γ налази на површи енергије $S = H^{-1}(c)$. Дакле, ако је c регуларна вредност Хамилтонијана H, поставља се питање да ли хиперповрш $H^{-1}(c)$ садржи Хамилтонову орбиту. Имајући у виду ово и став 1.11 логично је поставити општије питање да ли дата хиперповрш $S \subset (M, \omega)$ има затворену карактеристику, тј. да ли је $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$. Ово питање се може делимично разрешити коришћењем Хофер Цендеровог капацитета. Идеја је да ако имамо услов коначности $c_{HZ}(U)$ на околини U дате хиперповрши, можемо наћи *бесконачно много* затворених карактеристика у близини хиперповрши S, а ако је та хиперповрш притом и контактног типа, онда и она сама садржи затворену карактеристику. Наведимо најпре неколико уводних лема.

У целом поглављу претпостављамо да је (M, ω) симплектичка многострукост и $S \subset M$ компактна хиперповрш на њој. Нека је g произвољна Риманова структура на M сагласна са ω, тј. важи $\omega(\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$ за неку скоро комплексну структуру J на M. Са $\mathcal{N}(S) = TS^{\perp g}$ означимо нормално, а са $\mathcal{L}(S) = TS^{\perp \omega}$ (као и раније) карактеристично линијско раслојење од S. Имамо следећи став:

Став 5.6. Линијска раслојења $\mathcal{L}(S)$ и $\mathcal{N}(S)$ су изоморфна.

Доказ. Изоморфизам се постиже скоро комплексном структуром J,

$$\mathcal{L}(S) \to \mathcal{N}(S), \qquad \xi_x \to J\xi_x$$

■

Дефиниција 5.1. *Параметризована фамилија хиперповрши моделирана на* S је дифеоморфизам $\psi : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset M$. У овим ознакама са S_λ означавамо слику $\psi(S \times \{\lambda\})$.

Важи следећа корисна карактеризација хиперповрши $S \subset (M, \omega)$.

Став 5.7. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) Раслојење $\mathcal{L}(S) \to S$ је оријентабилно.

(2) Раслојење $\mathcal{N}(S) \to S$ је оријентабилно.

(3) С је оријентабилна многострукост.

(4) Постоји параметризована фамилија хиперповрши моделирана на S.

(5) Постоји $H \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ дефинисан на некој околини $U \supset S$ такав да је $S = H^{-1}(c)$ и $dH|S \neq 0$, дакле S је површ енергије.

Доказ. Уз помоћ става 5.6 и мало знања диференцијалне топологије иде директно. ■

Надаље претпостављамо да хиперповрш S која задовољава било који а самим тим и сваки од услова (1)-(5). Са $S_{\lambda\ (\lambda \in I)}$, где је $I = (-\delta, \delta)$ отворени интервал обележавамо произвољну параметризовану фамилију хиперповрши моделирану на њој. Формулишимо сада прву теорему о егзистенцији затворених карактеристика.

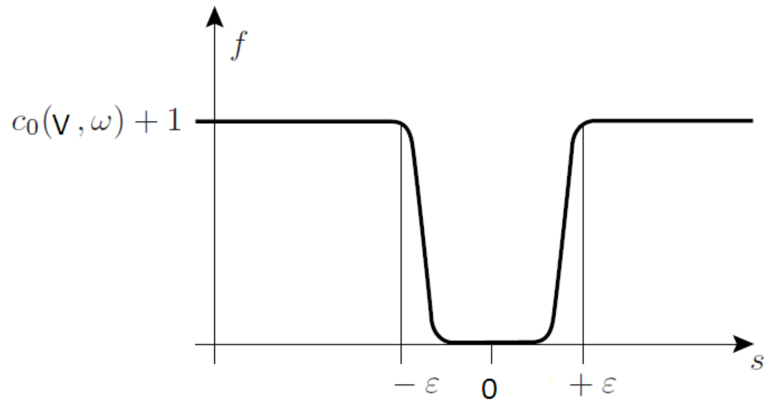
Теорема 5.2. (Хофер, Цендер) Нека је S хиперповрш у (M, ω) таква да има околину коначног капацитета, $c_{HZ}(U) < \infty$. Тада за сваку фамилију хиперповрши моделираној на S и садржаној у U, скуп $\lambda \in I$ за које важи $\mathcal{P}(S_\lambda) \neq \emptyset$ је густ.

Доказ. Идеја је да искористимо коначност капацитета на U тако што ћемо најпре прећи на околину $V := \bigcup\limits_{\lambda \in I} S_\lambda$, која према својству монотоности такође има коначан капацитет. Затим конструишемо радијални Хамилтонијан $H : V \to \mathbb{R}$ са $m(H) > c_{HZ}(V)$. По дефиницији c_{HZ}, такав ће имати периодичну орбиту, и пажљивом конструкцијом можемо одабрати да та периодична орбите буде на S_λ, за густо $\lambda \in I$. За произвољно мало $\varepsilon > 0$ дефинишемо функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такву да је

1) $f(s) = c_{HZ}(V, \omega) + 1$, за $s \leq -\varepsilon$ и $s \geq \varepsilon$

2) $f(s) = 0$, за $\frac{\varepsilon}{2} \leq s \leq \frac{\varepsilon}{2}$

3) $f'(s) < 0$, за $\varepsilon < s < \frac{\varepsilon}{2}$, за s велико



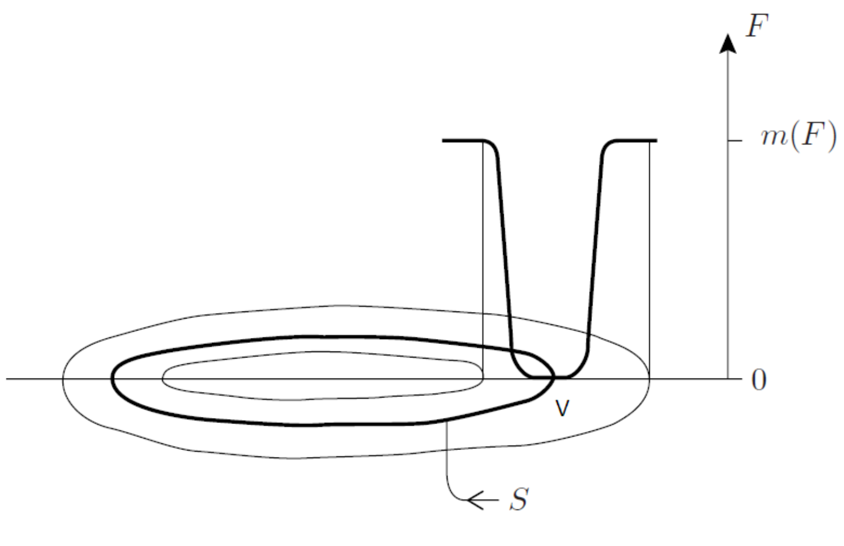
Слика 7: График функције f

4) $f'(s) > 0$ за $\frac{\varepsilon}{2} < s < \varepsilon$.

Сада дефинишимо Хамилтонијан радијално (слика 8) $F : V \to \mathbb{R}$, са

$$F(x) = f(\lambda), \text{ за } x \in S_\lambda.$$

Тада је $F \in \mathcal{H}(V, \omega)$ и $m(F) > c_{HZ}(V, \omega)$ што значи да постоји неконстантна



Слика 8: Радијални Хамилтонијан на околини од S

периодична Хамилтонова орбита са периодом $T \leq 1$ на V. Из радијалности F закључујемо да она цела мора припадати некој S_λ. Дакле, важи $\mathcal{P}(S_\lambda) \neq \emptyset$.

Даље, из својстава функције f и неконстантности орбите закључујемо да мора бити $\frac{\varepsilon}{2} < |\lambda| < \varepsilon$. Сада, из произвољности $\varepsilon > 0$ можемо наћи низ $\lambda_j \to 0$ такав да важи $\mathcal{P}(S_{\lambda_j}) \neq \emptyset$. Како у овој фамилији моделираној на S за сваку хиперповрш S_λ можемо поновити претходну причу, добијамо да је скуп

$$\{\lambda \in I \mid \mathcal{P}(S_\lambda) \neq \emptyset\}$$

густ у I, што је и требало доказати. ■

Постоји делимично уопштење претходне теореме, такође доказана од истих аутора.

Теорема 5.3. (Хофер,Цендер) Претпоставимо да је хиперповрш $S \subset (M, \omega)$ граница комактне симплектичке многострукости у M. Ако важи $c(M, \omega) < \infty$, имамо да важи

$$\mu\{\lambda \in I \mid \mathcal{P}(S_\lambda) \neq \emptyset\} = \mu(I),$$

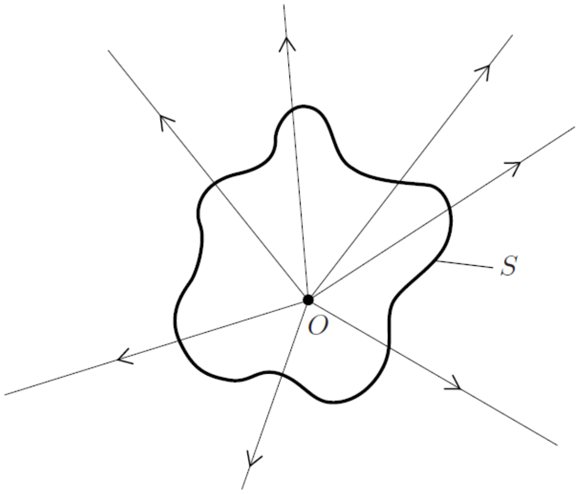
где је μ Лебегова мера.

Доказ. Видети у [33] ■

Претходни ставови гарантују постојање затворене карактеристике произвољно близу датој хиперповрши S, али не и на њој самој. Додатно, постоје примери хиперповрши који немају затворене карактеристике. Међутим, ако посматрамо хиперповрши S контактног типа, дефинисане у глави 1, можемо гарантовати постојање затворене карактеристике. Наиме, А. Ваинштајн је поставио хипотезу

Хипотеза 5.1. (Вајнштајнова хипотеза, 1978) Нека је $S \subset (M, \omega)$ хиперповрш контактног типа за коју важи $H^1(S) = 0$. Тада она има затворену карактеристику.

Ова хипотеза је била инспирисана резултатима на пољу затворених карактеристика односно периодичних орбита. Наиме, Вајнштајн је 1978. доказао постојање Хамилтонових орбита на конвексним а Рабиновиц 1979 на звездастим хиперповршима у R^{2n}. Звездаста хиперповрш је уопштење конвексне, а хиперповрш контактног типа је уопштење звездасте. Наиме, ако је $S \in \mathbb{R}^{2n}$ звездаста хиперповрш са истакнутом тачком у координатном почетку, векторско поље $X(x) = \frac{1}{2}x$ задовољава $L_X(\omega_0) = \omega_0$, и трансверзално је на S (слика), те је S контактног типа, на основу става 1.13.



Слика 9: Звездаста хиперповрш у $\mathbb{R}^{2n}$

Вајнштајнову хипотезу без тополошке претпоставке $H^1(S) = 0$ је у $\mathbb{R}^{2n}$ доказао Витербо 1987. у раду [47]. Ми ћемо доказати ову хипотезу у произвољном симплектичком амбијенту, под претпоставком *коначности Хофер-Цендеровог капацитета* неке околине хиперповрши. Овај услов је аутомацки испуњен у $\mathbb{R}^{2n}$ јер је капацитет лопте коначан, те дајемо засебан доказ Вајнштајнове хипотезе у R^{2n}. Пре тога уведимо један нови појам.

Дефиниција 5.2. Компактну хиперповрш називамо *стабилном* ако постоји параметризована фамилија $\psi : S \times (-1, 1) \to U$ моделована на S таква да дифеоморфизам $\psi_\varepsilon : \psi(x, 0) \to \psi(x, \varepsilon)$ индукује изоморфизам раслојења

$$T\mathcal{L}_S \to \mathcal{L}_{S_\varepsilon},$$

за свако $\varepsilon \in (-1, 1)$.

Став 5.8. Хиперповрш контактног типа је стабилна.

Доказ. Важност услова контактног типа на S је та што постоји природна параметризована фамилија моделована на S, која потиче од тока φ^t векторског поља X из става 1.13. Обзиром да важи $L_X\omega = \omega$ закључујемо интеграцијом да је $(\varphi^t)^*\omega = \omega$. Самим тим, извод тока φ^t чува $\mathcal{L}_S$ као језгро ω. ∎

Напомена: Обрнуто не важи. Наиме постоје примери стабилних хиперповрши које нису контактног типа и могу се видети у [33].

Докажимо сада споменуту варијанту Вајнштајнове хипотезе.

Теорема 5.4. Претпоставимо да је $S \subset (M, \omega)$ хиперповрш са околином U за коју важи $c_{HZ}(U) < \infty$. Ако је она додатно и стабилна, онда важи $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$. Специјално, ако је S контактног типа онда има затворену карактеристику.

Доказ. На основу дефиниције стабилности знамо да постоји фамилија S_λ хиперповрши моделована на S таква да су раслојења $\mathcal{L}_S$ и $\mathcal{L}_{S_\lambda}$ изоморфна. При том изоморфизму, скупови карактеристика $\mathcal{P}(S)$ и $\mathcal{P}(S_\lambda)$ су у природној бијекцији. С друге стране, на основу теореме 5.2 знамо да постоји блиска S_λ за коју је $\mathcal{P}(S_\lambda) \neq \emptyset$, те је онда и $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$. ■

Дакле, видели смо да можемо закључити разне резултате о затвореним карактеристикама на хиперповрши а самим тим и периодичним орбитама на површима енергије, под претпоставком о коначности c_{HZ}. Као што смо раније напоменули, ова претпоставка је увек задовољена у $\mathbb{R}^{2n}$, обзиром да је компактна хиперповрш оганичена, самим тим и садржана у лопти, која има коначан капацитет, $c_{HZ}(B^{2n}(r), \omega_0) = \pi r^2$. У следећем поглављу ћемо се стога подробније бавити коначношћу Хофер-Цендеровог капацитета.

5.3 Коначност Хофер-Цендеровог капацитета

Видели смо у претходној глави да је услов коначности Хофер-Цендеровог капацитета на некој многострукости од важности у потрази за Хамилтоновим периодичним орбитама Хамилтонијана на њој. Такође, доста примера указује да је овај капацитет код компактних многострукости често коначан. Сем компактних подмногострукости у $\mathbb{R}^{2n}$, имамо из става 3.6 да је $c_{HZ}(M)$ коначан за све затворене површи M. Наведимо још један пример.

Пример 5.1. Пројективни простор $\mathbb{C}P^n$ са Фубини-Штудијевом формом има капацитет $c_{HZ}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}) = \pi$. Овај резултат је нетривијалан и објављен у раду [30] Хофера и Витербоа. Доказ користи структуру холоморфних сфера у $\mathbb{C}P^n$ и базиран је на Фредхолмовој теорији елиптичких система првог реда.

Међутим, није за сваку компактну симплектичку многострукост $c_{HZ}(M, \omega) < \infty$. Наиме, постоји пример ([33], глава 4) симплектичке форме ω^* на торусу $\mathbb{T}^4$ за који важи $c_{HZ}(\mathbb{T}^4, \omega^*) = +\infty$. Такође, отворени проблем је да ли за $n > 1$ важи

$$c_{HZ}(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0) < +\infty,$$

при чему је ω_0 симплектичка структура индукована из $\mathbb{R}^{2n}$ а $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$.

Један од критеријума доказивања коначности Хофер-Цендеровог капацитета је неједнакост из последице 4.2

$$c_{HZ}(U) \leq e(U).$$

између капацитета и енергије раздвајања, која је доказана коришћењем минимакс принципа и *спектралних инваријанти.* Њу су најпре доказали Хофер и Цендер за отворене подскупове $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, а до данас је доказана за велику класу симплектичких многострукости.

Пратећи идеју коришћења спектралних инваријанти, Кеј Ајри је у [34] доказао коначност Хофер-Цендеровог капацитета за диск-котангентна раслојења DT^*M под одређеним тополошким претпоставкама за M. Дефинишимо најпре неколико термина.

Дефиниција 5.3. *Диск-котангентно раслојење* многострукости M је скуп вектора у T^*M норме мање или једнаке 1.

$$DT^*M = \{(q, p) \in T^*M \mid |p| \leq 1\}.$$

Оно је подмногострукост од T^*M са границом, и има симплектичку структуру $\omega_M = d\lambda$, где је λ Лиувилова форма на T^*M.

Дефиниција 5.4. Са Λ_M означавамо Хилбертову многострукост слободних петљи Собољеве класе $W^{1,2}$, $\Lambda_M = W^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$.

Нека је $\alpha \in \pi_1(M)$ произвољна класа петљи у M, са Λ_M^α означавамо

$$\Lambda_M^\alpha = \{\gamma \in \Lambda_M \mid [\gamma] = \alpha\}.$$

Сада можемо формулисати главни резултат наведеног рада [34].

Теорема 5.5. (К. Ајри, 2011) Нека је M затворена Риманова многострукост, и α нетривијална хомотопска класа петљи на M. Претпоставимо да евалуација $ev : \Lambda_M^\alpha \to M, \gamma \to \gamma(0)$ има глатко сечење s. Тада је $c_{HZ}(DT^*M, \omega_M) < \infty$.

Директна последица ове теореме је

Последица 5.1. Нека је M затворена Риманова многострукост. Претпоставимо да постоји глатко дејство $\mathbb{S}^1 \times M \to M$, такво да орбита $\gamma_p : \mathbb{S}^1 \to M, t \to t \cdot p$ није контрактибилна за неко $p \in M$. Тада је $c_{HZ}(DT^*M, \omega_M) < \infty$.

Сем спектралних инваријанти, Ајри је ради доказивања теореме 5.5 користио Флорову хомологију котангентних раслојења и *pair-of-pants* производ на њој, који је коришћењем изоморфизма Абодандола-Шварца између Флорове хомологије и хомологије простора петљи Λ_M, свео на једноставнији *loop* производ на $H_*(\Lambda_M)$.

Користећи Ајријеве резултате, У. Фрауенфелдер и А. Пајитнов су у скоријем раду [26] доказали коначност $c_{HZ}(DT^*M, \omega_M)$ за специјалну класу затворених многострукости M. Претпоставимо да је M затворена оријентабилна и повезана многострукост. Из алгебарске топологије (видети нпр [24]) је позната теорема:

Теорема 5.6. За сваки повезани тополошки простор X и групу G пресликавање

$$[X, BG] \to Hom(\pi_1(X), G), \quad [f] \to \varphi \circ f_*,$$

при чему је $\pi_1(BG) \xrightarrow{\varphi} G$ природни изоморфизам, је бијективно. ■

На основу ове теореме, закључујемо да постоји хомотопски јединствено пресликавање

$$\Lambda_X : X \to B\pi_1(X)$$

које при овој бијекцији одговара идентичком пресликавању у $Hom(\pi_1(X), \pi_1(X))$. Нека је $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$. Са $[M]_R$ означавамо фундаменталну класу многострукости у $H_*(M, R)$, а са $[[M]]_R$ елемент $(\lambda_M)_*[M] \in H_*(B\pi_1(X), R)$.

Дефиниција 5.5. Многострукост M зовемо R-*есенцијалном* када је $[[M]]_R \neq 0$. У супротном је зовемо $R-$*неесенцијалном.* Специјално, за $R = \mathbb{Q}$ користимо термин *рационално (не)есенцијална* многострукост.

Сада можемо навести споменути резултат из [26] и тиме завршити ово поглавље.

Теорема 5.7. (У. Фрауенфелдер, А. Пајитнов, 2016) Претпоставимо да је M затворена, повезана, оријентисана и рационално неесенцијална многострукост. Тада је Хофер-Цендеров капацитет њеног диск-котангентног раслојења коначан.

Литература

[1] М. Антић, *Диференцијална геометрија многострукости*, Математички факултет у Београду, 2015.

[2] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, *Теорија мере, Функционална анализа, Теорија оператора*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[3] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет у Београду, 2003.

[4] Б. Јовановић, *Парцијалне и интегралне једначине*, Завод за уџбенике, Београд, 2010.

[5] М. Матељевић, *Комплексне функције 1 и 2*, Друштво математичара Србије, Београд, 2006.

[6] Д. Милинковић, *Математичка анализа 2*, скрипта, `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~milinko//skripta/Analiza2.pdf`.

[7] Д. Милинковић, *Мини курс о симплектичким многострукостима,* скрипта `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~milinko//skripta/simplekticke.pdf.`

[8] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.

[9] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer, 1992.

[10] V.I. Arnold, *Sur une propriete topologique des applications globallmant canoniques de la mecanique classique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 1965.

[11] M. Audin, M. Damian, *Morse Theory and Floer Homology*, Springer, 2014.

[12] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Commentarii Mathematici Helvetici, 1978.

[13] J.C. Becker, D.H. Gottlieb, *A History of Duality in Algebraic Topology.*

[14] R. Bott, L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.

[15] Y. Chekanov, *Hofer's symplectic energy and Lagrangian intersections*, Contact and Symplectic Geometry, ed. C. Thomas, Cambridge University Press, 1996.

[16] K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer, and K. Wysocki. *Applications of symplectic homology II*, Math. Zeit. 223, 27-45 (1996)

[17] K. Cieleibak, H. Hofer, J. Latschev, F. Schlenk, *Quantitative symplectic geometry*, Recent Progress in Dynamics, MSRI Publications, Volume 54, 2007

[18] K. Cieliebak, K. Mohnke, *Punctured holomorphic curves and Lagrangian embeddings*, arxiv:1411.1870 (2014)

[19] B. Dacorogna and J. Moser, *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 7:1-26, 1990.

[20] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.

[21] I. Ekeland, H. Hofer *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math Z. 200, 355378 (1989).

[22] I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics II*,Math. Z. 203, 553567 (1990).

[23] Y. Eliashberg, L. Polterovich, *Bi-invariant metrics on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, International Journal of Mathematics, 1993.

[24] A. Hatcher, *Algebraic Topology,* доступна на https://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf.

[25] A. Floer, H. Hofer. *Symplectic homology I: Open sets in* $\mathbb{C}^n$, Math. Zeit. 215, 37-88 (1994)

[26] U. Frauenfelder, A. Pajitnov, *Finiteness of* π_1*-sensitive Hofer-Zehnder capacity and equivariant loop space homology,* arXiv:1603.05793 (2016)

[27] M. Gromov, *Pseudo Holomorphic Curves in Symplectic Manifolds*, Inventiones mathematicae, 1985.

[28] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps* , Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1990.

[29] H. Hofer, *Estimates for the energy of a symplectic map*, Comment. Math. Helv. 68, 4872 (1993).

[30] H. Hofer, C. Viterbo. *The Weinstein conjecture in the presence of holomorphic spheres,* Comm. Pure Appl. Math., 45(5):583-622 (1992).

[31] H. Hofer, E. Zehnder, *A new capacity for symplectic manifolds*, Analysis, et cetera, 405427, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[32] H. Hofer, E. Zehnder, *Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo*, Invent. math. 90, 1-9 (1987)

[33] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser 1994.

[34] K. Irie, *Hofer-Zehnder capacity of unit disk cotangent bundles and the loop product,* J. Eur. Math. Soc. 16, 2477-2497 (2014).

[35] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2012.

[36] Y. Karshon, Appendix to *Symplectic packings and algebraic geometry, D. McDuff and L. Polterovich*,
`http://www.utm.utoronto.ca/~karshony/papers/appendix-new.pdf`.

[37] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, 1999.

[38] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*,Wiley Classics Library, 1996

[39] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology: Second Edition*, American Mathematical Society, 2012.

[40] E.E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Annals of Mathematics, 1952.

[41] L. Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphism*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel 2001.

[42] P. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems,* Comm. Pure Appl. Math. 31, 157-184 (1978)

[43] P. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems on a prescribed energy surface,* J. Diff. Equ. 33, 336-352 (1979)

[44] E. Fadell, P. Rabinowitz, *Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems,* Invent. Math. 45, 139-173 (1978).

[45] K.F. Siburg, *Symplectic Capacities in Two Dimensions*, Manuscripta Math. 78, 149-163 (1993).

[46] F. Schlenk, *Embedding problems in symplectic geometry*, De Gruyter Expositions in Mathematics 40, Walter de Gruyter, Berlin, 2005.

[47] C. Viterbo *A proof of the Weinstein conjecture in* $\mathbb{R}^{2n}$, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire, 4:337-357 (1987)

[48] A. Weinstein. *On the hypothesis of Rabinowitzs periodic orbit theorems,* J. Diff. Equ., 33:353-358 (1979)

Индекс појмова