(1) Скрипта *Мини курс о симплектичким многострукостима*,

$$\text{http}: //\text{poincare.matf.bg.ac.rs}/\sim \text{milinko/skripta/simplekticke.pdf}$$

задаци 1–29 (стр 1–12).

(2) **Хармонијски осцилатор.** Нека је Хамилтонов систем задат Хамилтонијаном

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k(p_k^2 + q_k^2),$$

где су $a_1, \ldots, a_{n+1}$ позитивни бројеви.

(а) Решити овај систем.

(б) Наћи сва периодична решења на хиперповрши $H \equiv h > 0$.

(в) **Хопфова фибрација.** Доказати да за $a_1 = \cdots = a_{n+1} = 1$ овај систем дефинише дејство групе $\mathbb{S}^1$ на $\mathbb{S}^{2n+1}$ и да је простор орбита (количнички простор) овог дејства $\mathbb{C}P^n$.

(г) Доказати да је

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^n) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2n+1}).$$

(3) Посматрајмо аутономни систем на многострукости M.

(а) Нека је $H : T^*M \to \mathbb{R}$ Хамилтонијан система и θ Лиувилова форма на T^*M. Доказати да су трајекторије система екстремале интеграла

$$\mathcal{A}_0(\gamma) := \int_0^1 \gamma^*\theta$$

у простору кривих

$$\gamma : [0,1] \to T^*M$$

које леже на хиперповршима $\{H \equiv const\} \subset T^*M$ и задовољавају граничне услове

$$\pi(\gamma(0)) = q_0, \quad \pi(\gamma(1)) = q_1,$$

где је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција и $q_0, q_1 \in M$ фиксиране тачке.

(б) Доказати да су трајекторије система екстремале функционала

$$\gamma \mapsto \int_\gamma \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) \right\rangle dt$$

(где је $L = K - V$ Лагранжијан система) на простору кривих

$$\gamma : [0,1] \to M$$

са граничним условима $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(1) = q_1$, које су параметризоване тако да је $H(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}) \equiv const$.

(в) Доказати да трајекторије не морају да минимизују (ни да максимизују) функционал у (б).

(г) Нека је g Риманова метрика која дефинише кинетичку енергију

$$K = \frac{1}{2} g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

система на многострукости M, и нека је $V : M \to \mathbb{R}$ његова потенцијална енергија. Доказати да је

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle = 2K = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

где је s природни параметар (тј. дужина пут).

(д) Доказати да су трајекторије параметризоване тако да је $H \equiv E_0$ ако је параметар t изабран тако да је

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2(E_0 - V)}}.$$

(ђ) Доказати да су у области

$$\{q \in M \mid V(q) < E_0\} \subset M, \qquad E_0 \in \mathbb{R}$$

трајекторије система са енергијом E_0 геодезијске линије Риманове метрике

$$h := (E_0 - V)\, g.$$

(4) Нека је $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ линеарно пресликавање дато матрицом

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

(а) Доказати да је S симплектичко ако и само ако је

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A \end{bmatrix}.$$

(б) Доказати да је 2×2 матрица симплектичка ако и само ако је њена детерминанта једнака 1.

(5) Нека је $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ линеарно симплектичко пресликавање.

(а) Доказати да је

$$S^t J S = J,$$

где је

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

стандардна комплексна структура на $\mathbb{C}^n$.

(б) Доказати да важи и обрнуто тврђење: ако је $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ линеарно пресликавање за које важи $S^t J S = J$, онда је оно симплектичко.

(в) Доказати да за карактеристични полином P пресликавања S важи

$$P(\lambda) = \lambda^{2n} P\big(\frac{1}{\lambda}\big).$$

(г) Ако $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност пресликавања S, доказати да су и

$$\frac{1}{\lambda}, \quad \bar{\lambda}, \quad \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

његове сопствене вредности. Другим речима, сопствене вредности симплектичке матрице су распоређене симетрично у односу на реалну осу и јединични круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.