Seminarski rad: INTERPOLACIONI TALASIĆI

Spadaju u biortogonalne talasiće

$$\varphi(t) = \sum_k h_0(k)\varphi(2t-k), \qquad \tilde{\varphi}(t) = 2\sum_k f_0(k)\tilde{\varphi}(2t-k),$$
$$\psi(t) = \sum_k h_1(k)\varphi(2t-k), \qquad \tilde{\psi}(t) = 2\sum_k f_1(k)\tilde{\varphi}(2t-k).$$

koji zadovoljavaju uslov

$$2^{J/2}\varphi_{J,l}(k2^J) = \varphi(k-l) = \delta_{k,l}.$$

Koeficijenti dilatacione jednačine određeni su formulom

$$\begin{aligned}&[h_0(-M+1),\dots,h_0(-3),h_0(-1),\,h_0(0),\,h_0(1),\dots,h_0(M-1)]\\ &\qquad = [q(1),\dots,\,q(M/2),\,1,\,q(M/2),\dots,q(1)],\end{aligned} \tag{1}$$

gde je

$$q(l) = \frac{1}{2^{M-1}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{M}\frac{M+1-2k}{l-k}, \qquad l = 1,\dots,\frac{M}{2} \tag{2}$$

(koeficijenti $h_0(2l) = 0$ za $|2l| < M$). M je paran broj i određuje stepen interpolacionog polinoma korišćenog u konstrukciji $(M-1)$.

Dualna funkcija skaliranja je Dirac-ova δ funkcija, te je

$$f_0(0) = 1, \qquad f_0(n) = 0, \quad n \neq 0.$$

Visokofrekventni koeficijenti (koeficijenti jednačina talasića) su određeni uslovom ortogonalnosti dvostrukog pomeraja

$$h_1(n) = (-1)^n f_0(1-n), \qquad f_1(n) = (-1)^n h_0(1-n).$$

Sledi da je

$$h_1(1) = -1, \qquad h_1(n) = 0, \quad n \neq 1,$$

te zamenom u jednačini talasića dobijamo da je talasić pridružen interpolacionoj funkciji skaliranja

$$\psi(t) = -\varphi(2t-1), \qquad -\infty < t < \infty. \tag{3}$$

Interpolacioni talasići se dobijaju rekurzivnom interpolacijom, algoritmom kojim se konstruiše kvazi neprekidna funkcija $f(t)$ na osnovu njenih vrednosti f_i u konačno mnogo datih tačaka t_i. Neka je M paran broj koji je znatno manji od broja tačaka t_i. U prvom koraku algoritma interpolacijom određujemo vrednosti funkcije f u svim sredinama intervala određenih susednim tačkama t_i, pri čemu za čvorove interpolacije uzimamo $M/2$ tačaka t_i levo i $M/2$ tačaka t_i desno od uočene sredine. Dakle, vrednost u uočenoj središnjoj tački računamo pomoću interpolacionog polinoma stepena $M-1$ određenog sa pomenutih M uzastopnih tačaka t_i. U sledećem koraku algoritma koristimo novi skup podataka (stare i nove tačke), koji je dvostruko veći od polaznog, kao ulaz u sledeću interpolaciju u središnjim tačkama. Ova rekurzija moze beskonačno puta da se ponavlja, tako da dobijamo kvazi neprekidnu funkciju.

Ako su tačke t_i diadske tačke, $t_i = i/2^J$, a $f_k = 1$ i $f_i = 0$, $i \neq k$, na ovaj način biće određena funkcija skaliranja $\varphi(2^J t - k)$.

Formula (2) predstavlja Lagrange-ove bazisne polinome na diadskom skupu čvorova

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}, \qquad q_i = l_i(0).$$

Napisati program u MatLabu za:

1. Računanje koeficijenata biortogonalnih filtera $h_0(n)$, $h_1(n)$, $f_0(n)$, $f_1(n)$.
2. Crtanje interpolacione funkcije skaliranja $\varphi(2^J t - k)$ i njoj pridruženog talasića (form.3).

Ulaz:

1. Broj čvorova interpolacije M.
2. Nivo rezolucije J i pomeraj k kojima se vrši izbor funkcije skaliranja i talasića koji se crtaju.
3. Broj koraka rekurzivne interpolacije.

Izlaz:

1. Editovati vrednosti koeficijenata filtera $h_0(n)$, $h_1(n)$, $f_0(n)$, $f_1(n)$.
2. Grafički predstaviti (spajanjem susednih tačaka pravom) funkciju skaliranja $\varphi(2^{-J} t - k)$ i njoj pridružen talasić (različftim bojama).