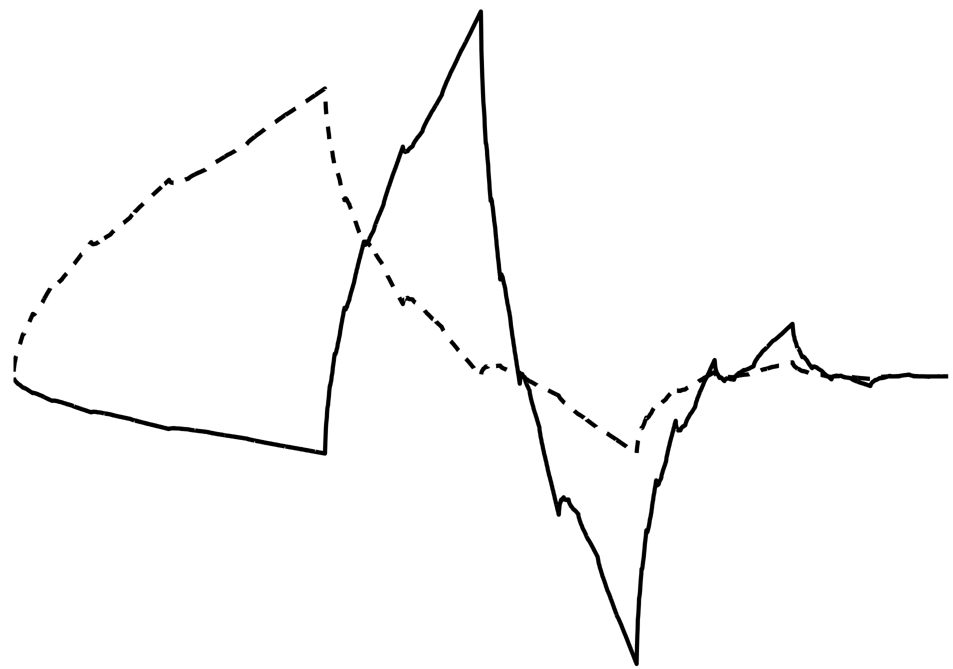
TALASIĆI (WAVELETS)

1. Transformacija
2. Multirezolucija
3. Konstrukcija
4. Filtar
5. Osobine
6. Piramidalni algoritam
7. **Primeri i primene**



2007

Koje funkcije mogu biti talasići?

Funkcija $\psi(x)$ će biti nazvana talasić ako

- familija dilatacija i translacija funkcije $\psi(x)$ omogućava da se sve funkcije iz prostora $\mathcal{L}_2$ rekonstruišu korišćenjem detalja na svim skalama,
- ima momente nula,
- brzo opada ka nuli za $t \to \pm\infty$, ili je nula van nekog konačnog intervala u $\mathcal{R}$.

Nije neophodno da postoji pridružena funkcija skaliranja $\varphi(x)$ (Morlet-ov talasić).

Glavni kriterijumi u konstrukciji i izboru talasića

• *Ograničen nosač* za $\psi(x)$, $\widehat{\psi}(\omega)$ i $\varphi(x)$, $\widehat{\varphi}(\omega)$; ili, opštije, brza konvergencije ka nuli u beskonačnosti, bilo po vremenu bilo po frekvenciji.
Ova osobina određuje vremensku i frekvencijsku lokalizaciju. Talasiću sa ograničenim nosačem je pridružen konačan (FIR) filter, pa su sume u FWT algoritmu konačne.

● *Ortogonalnost* (ili biortogonalnost) je poželjna osobina jer za posledicu ima

- jednakost $\mathcal{L}_2$ normi funkcije i niza njenih koeficijenata u razvoju po talasićima;
- transformacija ortogonalnim talasićima je unitarna, što znači da je stabilna;
- računski algoritam je brz i ne zauzima mnogo memorijskog prostora;
- u ortogonalnoj multirezolucijskoj analizi projekcioni operatori na različite pot-prostore daju optimalne aproksimacije u smislu $\mathcal{L}_2$ norme.

● *Simetrija* Filtri pridruženi simetričnim funkciji skaliranja i talasiću imaju, u opštem slučaju, linearnu fazu.
Odsustvo ove osobine može dovesti do distorzije faze, što je posebno nepoželjno u obradi zvučnih signala. Ova osobina je korisna i pri obradi slike.
Simetrija isključuje ortogonalnost (osim za trivijalan Haar-ov filtar).

● *Regularnost* je bitna za glatkost rekonstruisanog signala ili slike.
Veća glatkost obezbeđuje bolju frekvencijsku lokalizaciju filtra.
Glatkost bazisnih funkcija je poželjna u primenama u numeričkoj analizi, kada se koriste izvodi.

- *Broj iščezavajućih momenata* talasića ψ je bitan za kompresiju, jer od toga zavisi veličina koeficijenata talasića i mogućnost zanemarivanja malih koeficijenata.

- *Broj iščezavajućih momenata dualnog talasića* određuje brzinu konvergencije aproksimacije talasićima glatkih funkcija.

- *Racionalni koeficijenti* U računarskim implementacijama korisno je da su koeficijenti filtra racionalni brojevi, ili, još bolje, diadski racionalni. U računaru množenje stepenom broja dva vrši se šiftovanjem bitova, što je vrlo brza operacija.

- *Analitički izrazi* ne postoje uvek za talasić i funkciju skaliranja, ali je nekada poželjno ih imati.

- *Interpolacija* Ako funkcija skaliranja zadovoljava uslove $\varphi(k) = \delta_k,\ k \in \mathcal{Z}$, onda je trivijalno naći funkciju iz $\mathcal{V}_j$ koja interpoliše podatke date na mreži koraka 2^j, pošto su koeficijenti u reprezentaciji jednaki podacima.

Nije moguće konstruisati talasić koji ima sva nabrojana svojstva

Daubechies talasići, DbN

- Dužina nosača talasića $\psi(x)$ i funkcije skaliranja $\varphi(x)$ je $2N-1$.
- Ortogonalni su.
- Jednostavan je zapis gustine energijskog spektra pridruženog filtra

$$\widehat{p}(\omega) = |\widehat{c}(\omega)|^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2N-1} h(k)e^{-\imath k\omega}\right)^2 = \big(\cos^2\frac{\omega}{2}\big)^N \,\widehat{q}\big(\sin^2\frac{\omega}{2}\big)$$

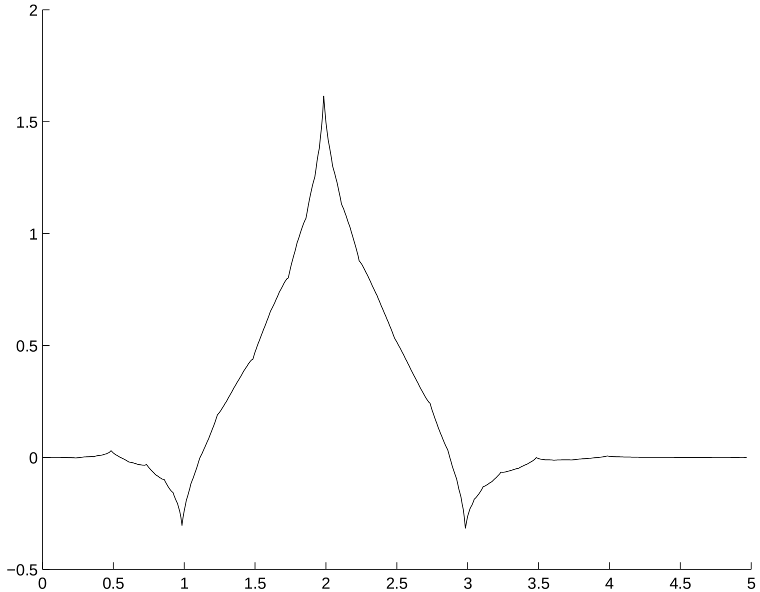
- Većina talasića *DbN* nisu simetrični, čak je kod nekih asimetrija vrlo izražena.
- Broj iščezavajućih momenata talasića $\psi(x)$ je N.
- Glatkost im se povećava sa redom N, funkcije $\psi(x)$ i $\varphi(x)$ pripadaju klasi $\mathcal{C}^{\mu N}$, $\mu \approx 0.2$ za veliko N.
- Nemaju eksplicitan izraz, izuzev Haar-ovog talasića *Db1*.

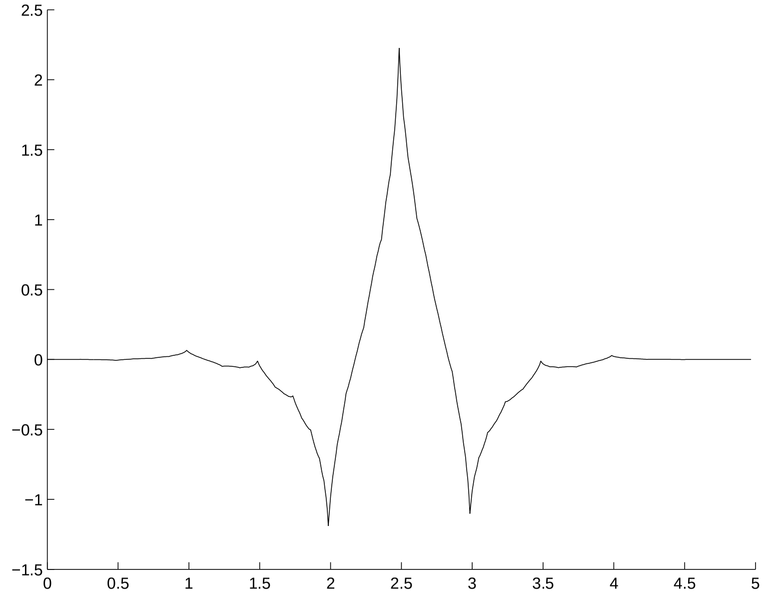
Symlet talasići, SymN

Drugačijim grupisanjem gustine energijskog spektra $P(z)$ na činioce $C(z)$ i $C(z^{-1})$, u odnosu na izbor koji određuje Daubechies filtar, dobija se filtar koji definiše skoro simetrične talasiće *SymN*. Daubechies filtar je određen tako da su svi koreni frekvencijskog odziva $C(z)$ po modulu manji ili jednaki jedan.
Ne može se postići potpuna simetrija u okviru ortonormiranog bazisa talasića sa konačnim nosačem (osim Haar-ovog talasića).
Ostale osobine ovih talasića su slične osobinama Daubechies talasića *DbN*.

Coiflet talasići, CoifN

Konstruisala ih je Daubechies na zahtev Coifman-a. Da bi se početni niz koeficijenata (na najfinijem nivou) piramidalnog algoritma što jednostavnije i tačnije računao, korisno je da i momenti funkcije skaliranja što višeg reda budu jednaki nuli. U tom slučaju, zamenom funkcije $f(x)$ njenim Taylorovim razvojem, dobija se da je $a_{0,n} \approx f(n)$. Greška je to manja što je $\int x^k \varphi(x)\,dx = 0$ za veće k.





Povećanje broja uslova povećava dužinu nosača, nosač je dužine $6N - 1$.

Talasić *CoifN* ima $2N$, a odgovarajuća funkcija skaliranja $2N - 1$ momenata jednakih nuli (nulti moment, integral same funkcije skaliranja, jednak je jedan).

U odnosu na dužinu nosača *CoifN* je uporediv sa *Db3N* i *Sym3N*, a u odnosu na broj iščezavajućih momenata talasića uporediv je sa *Db2N* i *Sym2N*.

Više su simetrični od *DbN*.

Koriste se u numeričkoj analizi.

Biortogonalni talasići

Ako se isti FIR filtri koriste za analizu i sintezu, ne može se postići i simetrija i savršena rekonstrukcija. Korišćenjem različitih filtara, ovo je moguće postići.

$H_0(z)$ niskofrekvencijski, $H_1(z)$ visokofrekvencijski filtar banke analize
$F_0(z)$ niskofrekvencijski, $F_1(z)$ visokofrekvencijski filtar banke sinteze

Uslov savršene rekonstrukcije je

$$F_0(z)\overline{H}_0(z) + F_1(z)\overline{H}_1(z) = 2, \qquad F_0(z)\overline{H}_0(-z) + F_1(z)\overline{H}_1(-z) = 0$$

Odzivi $H_0(z)$, $H_1(z)$, $F_0(z)$ i $F_1(z)$ su polinomi (i sa negativnim stepenima z), jer su filtri FIR, i povezani su relacijama

$$H_1(z) = z^{-1}\overline{F}_0(-z), \qquad F_1(z) = z^{-1}\overline{H}_0(-z)$$

Iskazano preko koeficijenata filtara veze su

$$\sum_n h_0(n) f_0(n+2k) = \delta(k)$$

$$h_1(n) = (-1)^{n+1} f_0(1-n) \qquad f_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(1-n)$$

Tako dolazimo do simetričnih biortogonalnih bazisa talasića.

Konstruišu se dva niza multirezolucijskih prostora

$$\mathcal{V}_j + \mathcal{W}_j = \mathcal{V}_{j-1}, \qquad \tilde{\mathcal{V}}_j + \tilde{\mathcal{W}}_j = \tilde{\mathcal{V}}_{j-1}$$

Sume prostora su direktne (prostori nemaju zajedničkih elemenata), ali u opštem slučaju nisu ortogonalne.

Ortogonalnost postoji među prostorima različitih multirezolucija.

$$\mathcal{V}_j \perp \tilde{\mathcal{W}}_j, \qquad \mathcal{W}_j \perp \tilde{\mathcal{V}}_j.$$

Koeficijentima filtara definisani su bazisi ovih prostora, biortogonalne funkcije skaliranja i talasići

$$\varphi(x) = \sum_k h_0(k)\varphi(2x-k), \qquad \tilde{\varphi}(x) = 2\sum_k f_0(k)\tilde{\varphi}(2x-k),$$

$$\psi(x) = \sum_k h_1(k)\varphi(2x-k), \qquad \tilde{\psi}(x) = 2\sum_k f_1(k)\tilde{\varphi}(2x-k)$$

Bazisi ovih prostora su biortogonalni

$$\left(\psi_{j,k}\,,\,\tilde{\psi}_{J,K}\right) = \delta(j-J)\,\delta(k-K), \qquad \left(\varphi_{0,k}\,,\,\tilde{\varphi}_{0,K}\right) = \delta(k-K)$$

gde je

$$\tilde{\varphi}_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\tilde{\varphi}(2^{-j}x-k), \qquad \tilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\tilde{\psi}(2^{-j}x-k)$$

Posledica biortogonalnosti ova dva sistema funkcija je

$$f(x) = \sum_k a_{j,k} \tilde{\varphi}_{j,k}(x), \qquad a_{j,k} = \big(f,\, \varphi_{j,k}\big) = \int f(x) \varphi_{j,k}(x)\, dx,$$

$$f(x) = \sum_j \sum_k b_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(x), \qquad b_{j,k} = \big(f,\, \psi_{j,k}\big) = \int f(x) \psi_{j,k}(x)\, dx.$$

Piramidalni algoritam je definisan filtrima analize,

$$a_{j,k} = \sum_l h_0(l-2k) a_{j-1,l}, \qquad b_{j,k} = \sum_l h_1(l-2k) a_{j-1,l}$$

a inverzni piramidalni algoritam je definisan filtrima sinteze,

$$a_{j-1,l} = \sum_k \big(f_0(l-2k) a_{j,k} + f_1(l-2k) b_{j,k}\big)$$

Biortogonalni bazisi mogu zameniti uloge, tako da se tilda funkcije koriste u analizi a ove druge u sintezi. Izbor zavisi od regularnosti i broja iščezavajućih momenata jednih i drugih.

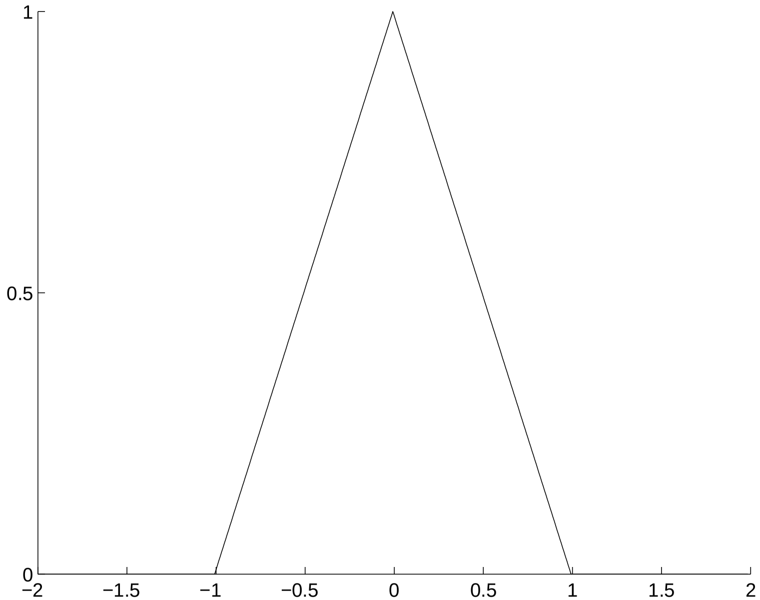
Ako $\psi_{j,k}$ i $\tilde{\psi}_{j,k}$ obrazuju dualne Riesz-ove bazise talasića sa ograničenim nosačem, postoji veza između broja iščezavajućih momenata jedne funkcije i regularnosti druge funkcije

$$\tilde{\psi} \in \mathcal{C}^m \qquad \longleftrightarrow \qquad \int x^k \psi(x)\, dx = 0, \quad k = 0, \ldots, m$$

Bolji izbor je sinteza po regularnijim talasićima. Koeficijenti u razvoju će biti računati po dualnim talasićima koji imaju veći broj iščezavajućih momenata, pa će veći broj koeficijenata za glatke funkcije biti nula.

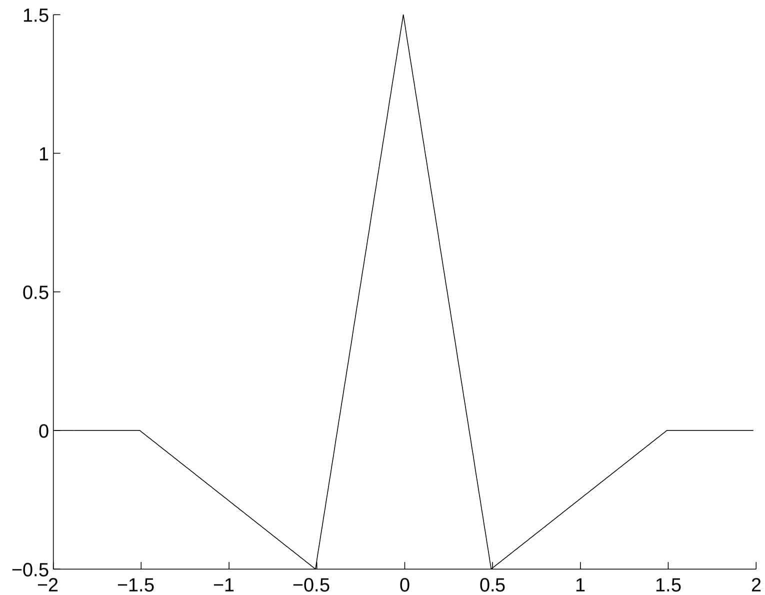
Ako se za funkcije skaliranja izaberu kardinalni B-splajnovi

- Njima određeni talasići, tj. filtri, su simetrični
- Sve funkcije, uključujući i dualne, imaju kompaktan nosač i linearnu fazu
- Svi koeficijenti filtara su diadski racionalni
- Nedostatak je što su dualne funkcije male glatkosti za male dužine filtara



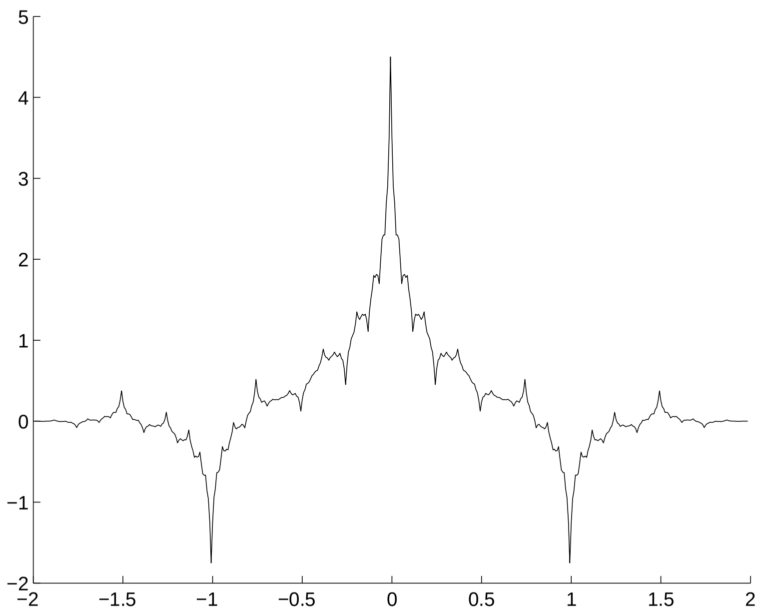
1
0.5
0
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

(a)



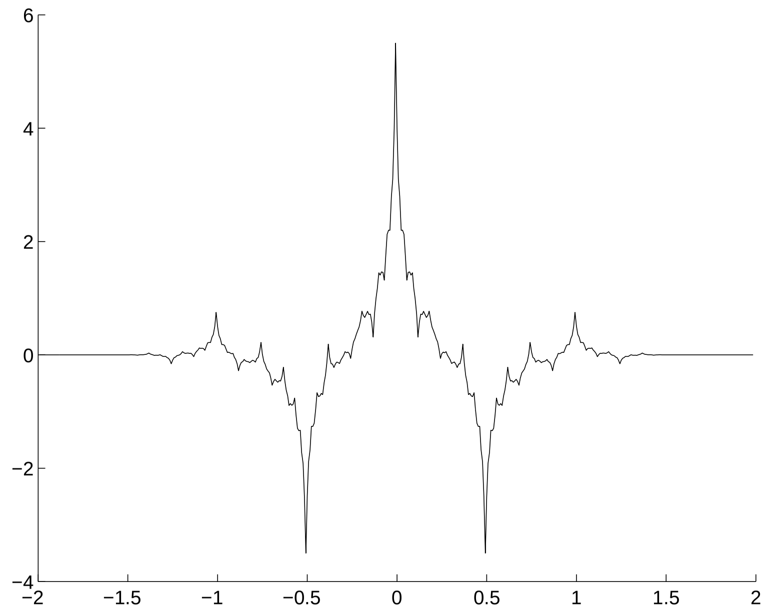
1.5
1
0.5
0
−0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

(b)



5
4
3
2
1
0
−1
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

(c)



6
4
2
0
−2
−4
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

(d)

Kardinalni B-splajnovi

Kardinalni B-splajn reda nula je četvrtka $\varphi_0(x) = \aleph_{[0,1]}(x)$, karakteristična funkcija intervala $[0,1]$.

Za $N \geq 1$ kardinalni B-splajn $\varphi_N(x)$ je definisan rekurzivno konvolucijom

$$\varphi_N(x) = (\varphi_{N-1} * \varphi_0)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{N-1}(\tau)\, \varphi_0(x-\tau)\, d\tau$$

♠ *Konvolucija N četvrtki je deo po deo polinom $\varphi_{N-1}(x)$ stepena $N-1$. Skokovi $(N-1)$-og izvoda u tačkama $x = 0, 1, \ldots, N$ su binomni koeficijenti sa alternativnom promenom znaka, $(-1)^k \binom{N}{k}$.*

$$\varphi_{N-1}(x) = (\varphi_{N-2} * \varphi_0)(x) = (\underbrace{\varphi_0 * \cdots * \varphi_0}_{N})(x)$$

Konvolucija po x u vremenskom domenu je ekvivalentna množenju po ω u frekvencijskom domenu,

$$\varphi_h(x) = (\varphi_f * \varphi_g)(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{\varphi}_h(\omega) = \widehat{\varphi}_f(\omega)\, \widehat{\varphi}_g(\omega)$$

Fourier-ova transformacija

$$\widehat{\varphi}_0(\omega) = \int_0^1 e^{-\imath\omega t}\, dt = \frac{1 - e^{-\imath\omega}}{\imath\omega}, \quad \widehat{\varphi}_{N-1}(\omega) = \big(\widehat{\varphi}_0(\omega)\big)^N = \left(\frac{1}{\imath\omega}\right)^N (1 - e^{-\imath\omega})^N$$

Filtar

$$H_0(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1}, \quad H_{N-1}(z) = \big(H_0(z)\big)^N = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} z^{-k}$$

Frekvencijski odziv $H_{N-1}(z)$ ima nulu reda N za $z = -1$, tj. $\omega = \pi$ $\quad (r = N)$
Polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^{N-1}$ su kombinacije splajnova reda $N - 1$
Tačnost aproksimacije je reda N
Odgovarajući talasići imaju N iščezavajućih momenata

Koeficijenti filtra pridruženog splajnu reda $N-1$ mogu se dobiti na dva načina,

- $h(n)$ su koeficijenti polinoma $\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^N$
- $h(n)$ je određeno konvolucijom filtara $\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) * \cdots * \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$

(Svako množenje sa $\frac{1+z^{-1}}{2}$ je konvolucija sa $\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ u vremenskom domenu)
Koeficijenti filtra su binomni koeficijenti podeljeni sa 2^N.

Dilataciona jednačina, čije rešenje je splajn reda $N-1$, je

$$\varphi_{N-1}(x) = \frac{2}{2^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \varphi_{N-1}(2x-k)$$

$\diamond$ $N=2$ Konvolucija dve četvrtke proizvodi linearni splajn (krov funkciju)

$$\text{četvrtka} * \text{četvrtka} = \text{krov funkcija}$$

$$\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{4}, \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Diferenciranjem formule

$$\varphi_{N-1}(x) = (\varphi_0 * \varphi_{N-2})\,(x) = \int_0^1 \varphi_{N-2}(x-t)\,dt$$

dobija se rekurentna formula za izračunavanje izvoda splajna

$$\varphi'_{N-1}(x) = \int_0^1 \varphi'_{N-2}(x-t)\,dt = \varphi_{N-2}(x) - \varphi_{N-2}(x-1)$$

Daljim diferenciranjem i korišćenjem prethodne rekurentne veze dobija se

$$\varphi_{N-1}^{(N-1)}(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \varphi_0(x-k)$$

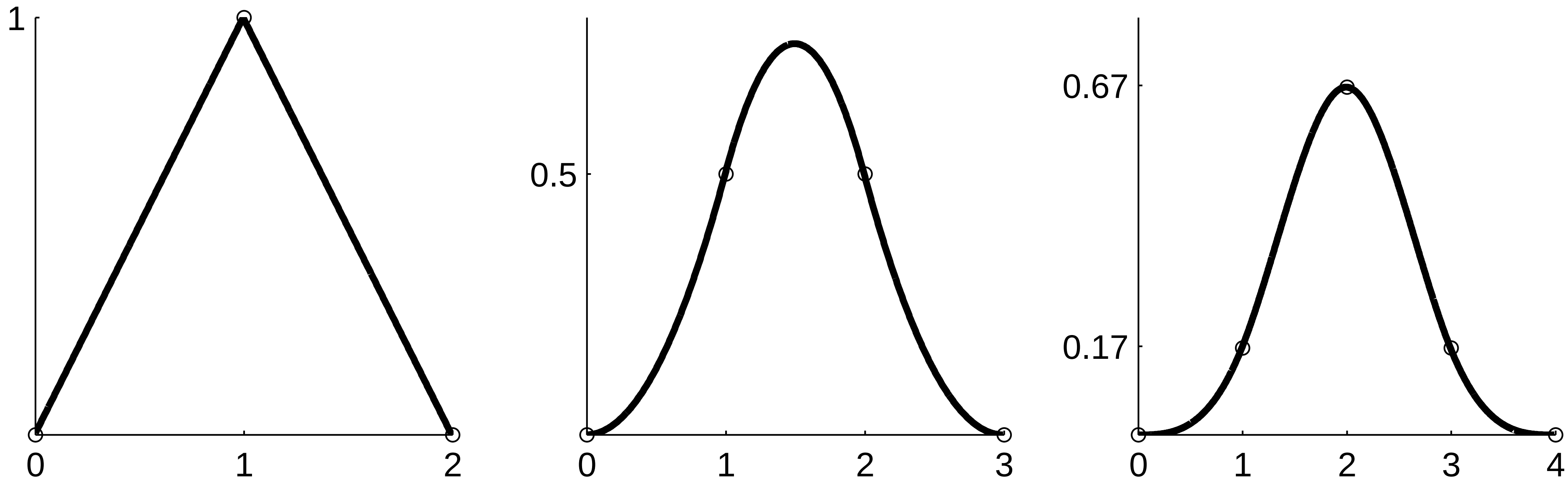
$$\varphi_{N-1}^{(N-1)}(j) = (-1)^j \binom{N}{j}, \quad j = 0, \ldots, N, \qquad \big(\varphi_0(j-k) = \delta(j-k)\big)$$

Dakle, skokovi $(N-1)$-og izvoda u tačkama $x = 0,\ 1, \ldots, N$ su binomni koeficijenti sa alternativnom promenom znaka.

◇ $N = 4$ Kubni B-splajn $\varphi_3(x)$ je konvolucija četiri četvrtke,

$$\varphi_3(x) = (\varphi_0 * \varphi_0 * \varphi_0 * \varphi_0)(x)$$

Rezultat prve konvolucije je



linearni $\varphi_1(x)$ (krov f-ja), druge kvadratni $\varphi_2(x)$ i poslednje kubni splajn $\varphi_3(x)$

Oni, redom, pripadaju klasama neprekidnih funkcija $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$ i $\mathcal{C}^2$

- Kubni B-splajn $\varphi_3(x)$ je različit od nule na četiri intervala
- Određen je niskofrekvencijskim filtrom $\mathbf{h} = (\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16})$
- Frekvencijski odziv ima nulu reda četiri u tački $z = -1$ $(\omega = \pi)$

$$H(z) = \frac{1}{16}(1 + z^{-1})^4, \qquad H^{(k)}(-1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

- Splajn je najveće moguće glatkosti i ima red tačnosti $p = 4$, najveći moguć za filtre dužine pet.
- Četvrti izvod kubnog splajna je suma Dirac-ovih funkcija. Koeficijenti kojima su množene delta funkcije su $1, -4, 6, -4, 1$ i predstavljaju skokove u trećem izvodu u celobrojnim tačkama nosača.

  Ovaj binomni šablon se primenjuje za svako N. Prvi izvod krov funkcije $\varphi_1(x)$ ima skokove $1, -2, 1$.

Skalarni proizvod splajna sa njegovom translacijom jednak je splajnu višeg reda,

$$a(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{N-1}(t)\varphi_{N-1}(t+n)\,dt = \varphi_{2N-1}(N+n)$$

Integral je konvolucija N četvrtki sa N novih četvrtki pomerenih za n. $2N$ četvrtki generiše splajn φ_{2N-1}.

Vektor $\mathbf{a} = \{a(n)\}$ je rešenje jednačine $\mathbf{a} = T\mathbf{a}$.

Operator T je određen proizvodom (gustinom energijskog spektra)

$$H_{N-1}(z)H_{N-1}(z^{-1}) = (\frac{1+z^{-1}}{2})^N(\frac{1+z}{2})^N = z^N\,(\frac{1+z^{-1}}{2})^{2N} = H_{2N-1}(z)$$

Matrica T za splajn reda ($N-1$) je identična matrici M za splajn reda ($2N-1$). Sopstveni vektor matrice M sadrži vrednosti splajna višeg reda u celobrojnim tačkama. Isti sopstveni vektor, kao sopstveni vektor matrice T, sadrži skalarne proizvode splajna nižeg reda.

Koji talasići su pridruženi splajnovima?

Splajnovi nisu ortogonalni u odnosu na svoje translacije (napr. krov funkcija, kubni B-splajn), tj. bazis $\{\varphi_{N-1}(x-k)\}$ prostora $\mathcal{V}_0$ nije ortogonalan.
Sa splajnovima se ne mogu konstruisati ortonormirani bazisi funkcija skaliranja i talasića koji su uzajamno ortogonalni.

- *Semiortogonalni talasić* sa svojim translacijama određuje bazis prostora $\mathcal{W}_0$, koji je ortogonalan na prostor $\mathcal{V}_0$

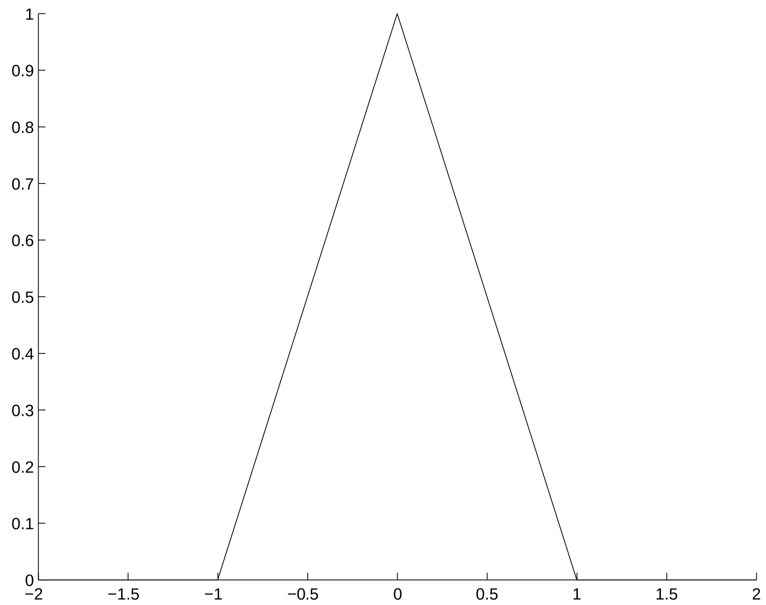
$$\mathcal{V}_0 \perp \mathcal{W}_0, \qquad \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_{-1}$$

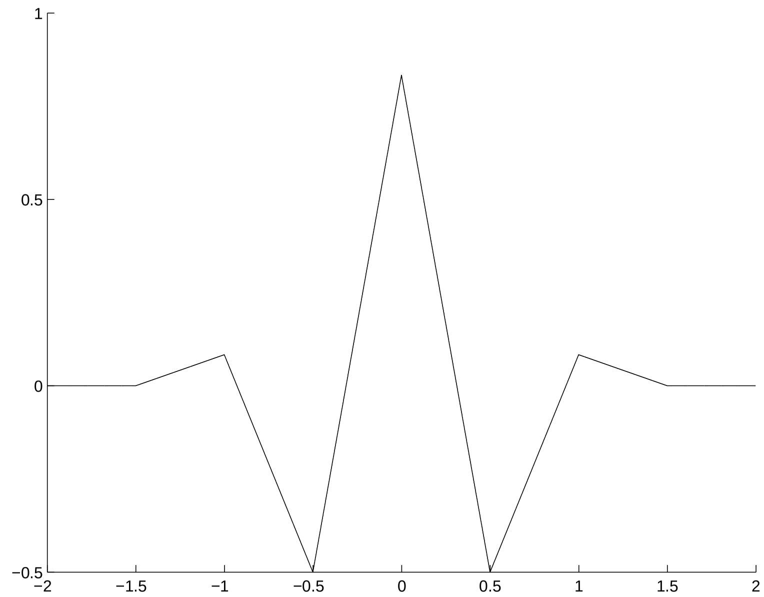
Imamo prostore koji su ortogonalni, ali čiji bazisi nisu ortogonalni.
Semiortogonalni talasić $\psi(x)$

- jeste ortogonalan na funkcije skaliranja (splajnove) $\varphi(x-n)$,
- nije ortogonalan na svoje translacije $\psi(x-n)$,
- jeste ortogonalan na sve talasiće $\psi(2^j x - n)$, $j \neq 0$ (sledi iz ortogonalnosti prostora $\mathcal{W}_0$ na prostor $\mathcal{V}_0$, koji sadrži sve prethodne prostore $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots$

◇ Semiortogonalni talasić pridružen krov funkciji

$$\psi(t) = \frac{1}{12}\Big(\varphi(2t) - 6\varphi(2t-1) + 10\varphi(2t-2) - 6\varphi(2t-3) + \varphi(2t-4)\Big)$$





- Pomoću splajnova se mogu konstruisati biortogonalni bazisi
- Polazeći od bazisa B-splajnova, postupkom ortogonalizacije, može se konstruisati ortogonalni bazis

Interpolacioni talasići

Spadaju u biortogonalne talasiće. Za funkciju skaliranja na nivou J važi da je

$$2^{J/2}\varphi_{J,l}(k2^J) = \varphi(k-l) = \delta_{k,l} \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \approx \sum_k f(k)\varphi(t-k)$$

Rekurzivnom interpolacijom konstruiše se kvazi neprekidna funkcija $f(x)$, na osnovu njenih vrednosti u konačno mnogo datih tačaka x_i.

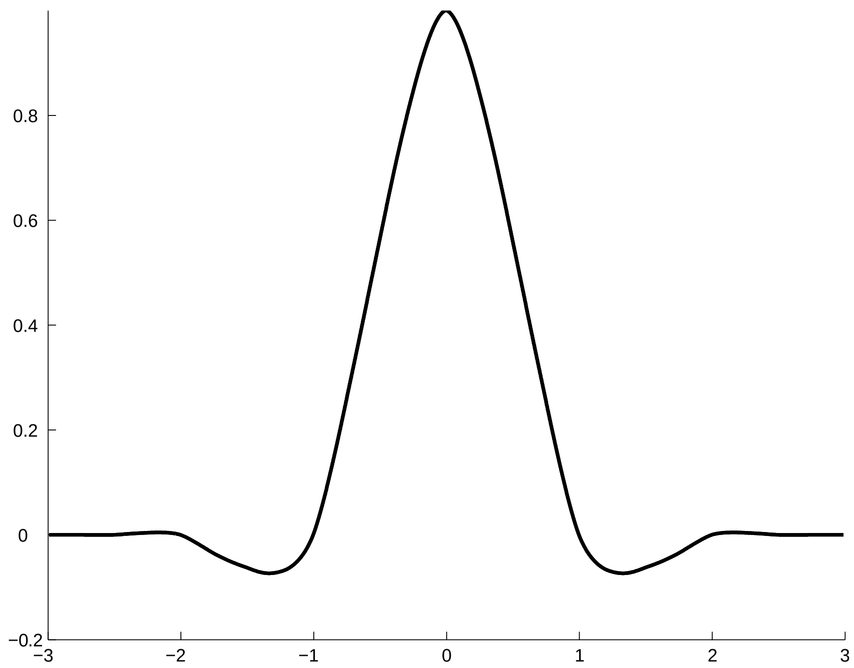
Algoritam:

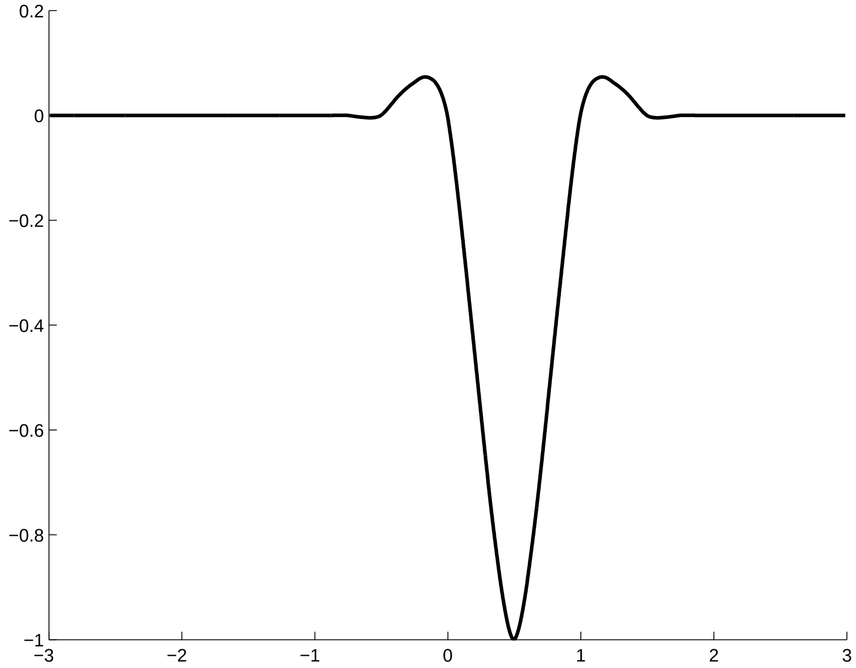
- Izabere se paran broj M, koji je znatno manji od broja čvorova interpolacije x_i
- Interpolacijom se određuju vrednosti funkcije u sredinama intervala određenih susednim tačkama x_i. Sa $M/2$ tačaka x_i levo i $M/2$ tačaka x_i desno od uočene sredine određen je interpolacioni polinom stepena $M-1$, pomoću koga se računa vrednost funkcije u središnjoj tački intervala
- Ponavlja se prethodni korak na novom skupu podataka (stare i nove tačke), koji je dvostruko veći od polaznog

Kada se rekurzija beskonačno puta ponavlja, dobija se kvazi neprekidna funkcija.

Ako su tačke x_i diadske tačke, $x_i = i/2^J$, a $f_k = 1$ i $f_i = 0$, $i \neq k$, na ovaj način biće određena funkcija skaliranja $\varphi(2^J t - k)$.

Pridruženi talasić je $\psi(t) = -\varphi(2t-1), \qquad -\infty < t < \infty$





Talasići koji nisu određeni funkcijom skaliranja

Morlet-ov talasić

$$\psi(x) = \exp\left(-\imath a\, x\right)\, \exp\frac{-x^2}{2\sigma}$$

$$\int \psi(x)\, dx \approx 0, \quad \text{za} \quad a = \pi\sqrt{\frac{2}{\ln 2}} = 5.336$$

Meksički šešir (Mexican hat)

Drugi izvod Gauss-ove funkcije

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \exp\frac{-x^2}{2\sigma} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1\right)\, \exp\frac{-x^2}{2\sigma^2}$$

Meyer-ov talasić

I talasić i funkcija skaliranja su konstruisani u frekvencijskom domenu pomoću funkcija $\sin(\omega)$ i $\cos(\omega)$, tako da njihove Fourier-ove transformacije imaju kompaktne nosače.

Osobine:

- Funkcija skaliranja je simetrična oko tačke $x = 0$, a talasić oko $x = 1/2$
- Funkcija skaliranja i talasić nemaju kompaktne nosače
- Opadaju brže u beskonačnosti od ma kog ”inverznog polinoma”

$$\forall n \in N, \exists C_n \qquad |\psi(x)| \leq C_n \left(1 + |x|^2\right)^{-n}$$

- Talasić je beskonačno diferencijabilna funkcija

osobina	**morlet**	**mexhat**	**meyer**	**haar**	**DbN**	**SymN**	**CoifN**	**biort**
nepotpun	*	*						
beskonačno regularan	*	*	*					
proizvoljan red regularnosti					*	*	*	*
kompaktan nosač				*	*	*	*	*
simetričan	*	*	*	*				*
asimetričan					*			
skoro simetričan						*	*	
iščezavajući momenti za ψ					*	*	*	*
iščezavajući momenti za φ							*	
postojanje φ			*	*	*	*	*	*
ortogonalnost			*	*	*	*	*	
biortogonalnost			*	*	*	*	*	*
tačna rekonstrukcija	$\approx$	*	*	*	*	*	*	*
FIR filtri				*	*	*	*	*
CWT	*	*	*	*	*	*	*	*
DWT			*	*	*	*	*	*
brzi algoritam				*	*	*	*	*
eksplicitni izraz	*	*		*				splajn

Primene

Obrada signala (analiza, sinteza, kompresija)

- Predviđanje i lociranje zemljotresa
- Proučavanje udaljenih galaksija
- Analiza i kompresija medicinskih signala (ECG, EEG)
- Kontrola kvaliteta analizom zvučnih signala
- Komunikacije (kompresija jako bitna)

Obrada slike

- Kompresija otisaka prstiju u srazmeri 20:1 (JPEG 2000)
- Kompresija slike
- Kompjuterska grafika
- Kompjuterski vid (multirezolucijski pristup)